Rainer Hempel

Eine Variationsmethode für elliptische Differentialoperatoren mit strengen Nichtlinearitäten

1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546803_0017

Eine Variationsmethode für elliptische Differentialoperatoren mit strengen Nichtlinearitäten

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der
Fakultät für Mathematik
der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Rainer Hempel
am 23. Dezember 1980

1. Berichterstatter: Professor Dr. E. Wienholtz

2. Berichterstatter: Professor Dr. G. Hämmerlin

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Juni 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

> Als Konstellation umkreist der theoretische Gedanke den Begriff, den er öffnen möchte, hoffend, daß er aufspringe etwa wie die Schlösser wohlverwahrter Kassenschränke: nicht durch einen Einzelschlüssel oder eine Einzelnummer sondern eine Nummernkombination.

(Theodor W. Adorno, Negative Dialektik, p. 166)

"Joine, warum hat ein Kutscher einen braunen, gelben, weißen oder schwarzen - niemals aber einen grünen Bart?"
Joine: "Das muß man klären!"
Nach einer Weile:
"Joine, weshalb schirrt man das Pferd immer mit dem Schwanz und nie mit dem Kopf gegen den Wagen an?"
"Das muß man klären."
Am andern Tag verkündet Joine beglückt:
"Ich habe beides zusammen geklärt! Wenn der Bart des Kutschers grün wäre, und man würde das Pferd mit dem Kopf gegen den Kutscher anschirren, dann würde ja das Pferd glauben, der Bart ist aus Gras, und würde versuchen, ihn zu fressen!"

(Aus: Salcia Landmann, Jüdische Witze)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung. 1

§1 Sesquilinearformen, lineare elliptische Differentialoperatoren und Sobolevräume. 11

§2 Eine Klasse quasilinearer elliptischer Differentialoperatoren vom variationellen Typ. 30

§3 Zur Existenz minimierender Funktionen. 35

§4 Eine Variationsmethode für strenge Nichtlinearitäten. 42

§5 Ein Dirichletsches Randwertproblem mit strengen Nichtlinearitäten. 54

§6 Ein Existenzsatz zur Eigenwertgleichung $(T+N)(u) = \lambda u$. 58

§7 Verzweigung am tiefsten Eigenwert des linearen Operators. 70

§8 Zur Abschließbarkeit des Operators T+N. 81

§9 Bilinearformen mit Potentialen $p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u)$. 92

§10 Über die Eindeutigkeit der minimierenden Funktion u_r. 120

§11 (Anhang) Bemerkungen zu §2. 128

§12 (Anhang) Ergänzungen zu §4. 131

Literaturverzeichnis. 136

Zusammenfassung. 143

Einleitung

1.) Die 'direkte Methode' der Variationsrechnung einerseits und das Dirichletsche Randwertproblem andrerseits haben sich über einen großen Zeitraum hinweg in enger Verbindung entwickelt (vgl. Morrey [49], chapter 1.3). Davon ausgenommen blieb in jüngster Zeit das Dirichletproblem für elliptische Operatoren mit sogenannten 'strengen' Nichtlinearitäten, d. h. zum Beispiel nichtlinearen Termen der Form $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)$ (mit $p_\alpha \in L^1_{loc}(G)$, $p_\alpha \geq 0$, $g_\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stetig, und $u \in H_o^{m,p}(G)$), wobei die g_α keine polynomiellen Schranken besitzen (d.h. es gibt keine Abschätzung des Typs: $|g_\alpha(t)| \leq c(|t|^r+1)$).

Die äußerst vielseitige und wirkungsvolle direkte Methode der Variationsrechnung besteht in diesem Zusammenhang aus folgenden typischen Schritten (vgl. Morrey [49]):

a) Man ordne dem Problem (etwa dem Dirichletproblem) ein halbbeschränktes Funktional S mit geeigneten Stetigkeitseigenschaften zu, die

b) gewährleisten, daß jede Minimalfolge gegen eine minimierende Funktion u konvergiert ("schwache untere Halbstetigkeit" zum Beispiel); dann folgt

c) aus der Betrachtung von $S(u+tv)$, daß u eine schwache Lösung der Eulergleichung ist.

Während nun die Definition des Funktionals S kanonisch und unabhängig von der Art der Nichtlinearitäten möglich ist (sofern überhaupt ein Problem mit formaler variationeller

Struktur vorliegt), und auch die schwache untere Halbstetigkeit von S unter sehr allgemeinen Bedingungen gesichert ist (im wesentlichen muß S konvex sein in $D^\alpha u$ für $|\alpha|=m$, vgl. Morrey [49], Theorem 1.9.1), treten bei c) entmutigende Schwierigkeiten auf, sobald man es mit strengen Nichtlinearitäten zu tun hat. Hier müßte man $S(u+t\varphi)$ betrachten und aus der Tatsache, daß

$$S(u+t\varphi) \geq S(u)$$

ist für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$, folgern, daß

$$\frac{d}{dt}(S(u+t\varphi))\Big|_{t=0} = 0 \tag{1}$$

gilt. Nun hat aber Landes mit einem einfachen Beispiel in [39] gezeigt, daß man im allgemeinen aus $S(u) < \infty$ nicht auf $S(u+t\varphi) < \infty$ schließen kann.

Das zweite Problem tritt bei der Differentiation (1) auf, wo man, um etwa mit Lebesgue zur Grenze übergehen zu können, geeignete Majoranten benötigt; auch hier wirken sich die 'strengen' Nichtlinearitäten äußerst störend aus, denn von u weiß man ja zunächst lediglich, daß S(u) existiert. Während aber in S die Stammfunktionen G_α (von g_α) erscheinen, kommen bei der Differentiation in (1) zwangsläufig die g_α selbst ins Spiel, die möglicherweise schneller wachsen als die G_α (für $t \to \pm\infty$).

2.) Damit ist man bei der folgenden (abstrakten) Fragestellung angelangt:

(P1) Wann kann man zeigen, daß die minimierenden Funktionen u zu S (deren Existenz etwa nach Th. 1.9.1 in [49] gesichert ist) auch schwache Lösungen der Eulergleichung sind?

Der hier eingeschlagene Weg besteht nun darin, für Integralfunktionale des Typs

$$S(u) := \frac{1}{2} B[u] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\, dx,$$

wobei B eine halbbeschränkte Sesquilinearform mit $D(B) \subset H_o^{m,2}(G)$ ist und $G_\alpha(t) := \int_o^t g_\alpha(s)\, ds$ mit $g_\alpha(t)t \geq 0$, statt $S(u+t\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_o^\infty(G)$, den Ansatz

$$S(u+t(\varphi - au)),\ 0 < a < \tfrac{1}{2},\ 0 < t < 1,$$

zu machen. Dies hat, grob gesprochen, den Vorteil, daß überall dort, wo $|D^\alpha u(x)|$ sehr groß ist, $-aD^\alpha u(x)$ stärker ins Gewicht fällt als $D^\alpha \varphi(x)$. Wegen der Vorzeichenbedingung $g_\alpha(t)t \geq 0$ hat aber G_α die Eigenschaft, daß $G_\alpha(\mu t) \leq G_\alpha(t)$ ist für alle t und $0 < \mu < 1$. Die Verbindung dieser beiden Beobachtungen erlaubt es dann, zunächst $S(u+t(\varphi - au)) < \infty$ nachzuweisen.

3.) Freilich hat sich die vorliegende Arbeit keineswegs so folgerichtig entwickelt, wie es bislang vielleicht den Anschein hatte. Vielmehr stand zuerst die Absicht im Vordergrund, nichtlineare Operatoren T+N in Analogie zum 1. Darstellungssatz für Sesquilinearformen zu definieren und damit nichtlineare Operatoren mit besonders 'schönen' Eigenschaften zu erhalten. Tatsächlich stellten sich hier jedoch später enge Beziehungen zum Variationsproblem heraus:

a) Die Surjektivität von T+N ist äquivalent zur Lösbarkeit eines Dirichletschen Randwertproblems;

b) Die nichtlineare Entsprechung zur Symmetrie im 1. Darstellungssatz (vgl. Satz 1.2o) ist die variationelle Struktur von T+N.

c) Auch bei der Frage nach der Abschließbarkeit des Graphen von T+N kann die Variationsmethode nutzbringend eingesetzt werden.

d) Schließlich wird mit Hilfe der Variationsmethode ein Verzweigungsproblem für den Operator T+N behandelt.

Wegen dieses Zusammenhangs mit dem 1. Darstellungssatz wird hier stets angenommen, daß der Hauptteil des Operators linear ist, obwohl man das Dirichletproblem auch für allgemeinere quasilineare Hauptteile ähnlich lösen kann.

4.) Ein letzter 'abstrakter' Grundaspekt kommt aus der Störungstheorie; es geht dabei um die Frage, in welchem Sinne das durch strenge Nichtlinearitäten gestörte Problem in das lineare übergeht, wenn die Norm von u klein wird. Dies betrifft zum Beispiel die Verzweigungsaussage, aber auch (in §9) die Art, wie gewisse lineare Operatoren T_u, die man dem nichtlinearen Problem und seiner Lösung u kanonisch zuordnen kann, gegen T konvergieren, wenn $u \to 0$ geht (dabei ist T der nach Satz 1.2o zur Form B gehörige, selbstadjungierte und halbbeschränkte Operator).

5.) Stark verallgemeinernd darf man also sagen, daß die Hauptquellen der folgenden Überlegungen in der Theorie der Sesquilinearformen, der Variationsrechnung und der Störungstheorie zu suchen sind. Ziel ist es, unter möglichst geringen Voraussetzungen Aussagen über elliptische Differentialoperatoren zu beweisen, die strenge Nichtlinearitäten enthalten. Strenge Nichtlinearitäten sind natürlich allein schon dadurch interessant, daß sie eine große Herausforderung darstellen; in den 10 Jahren seit Browders wegweisender

Arbeit [16] wurden (und werden) sie unter den verschiedensten Gesichtspunkten studiert (vgl. [2], [4], [5], [11], [12], [14], [17], [21], [25], [26], [30], [32], [39 - 43], [50 - 55], [60], [65], [70], [71]). Ihnen kommt jedoch auch eine gewisse Bedeutung im Rahmen der Quantenfeldtheorie zu (vgl. Rauch und Williams [60]; nichtlineare Schrödingeroperatoren werden z. Bp. in [4], [10], [13], [23], [27], [35], [43], [44] betrachtet). Natürlich ist aber vom mathematischen Standpunkt aus schon die Fragestellung (P1) reizvoll und wichtig genug.

6.) Zunächst wird der Aufbau der vorliegenden Arbeit von den Beweisschritten der 'direkten Methode' der Variationsrechnung bestimmt. Nach einem vorbereitenden Paragraphen 1, der Grundlagenmaterial über Sesquilinearformen, Sobolevräume und elliptische Operatoren enthält, folgt in §2 die Definition eines nichtlinearen Operators T+N und der zugehörigen Integralfunktionale, insbesondere der 'Stammfunktion' S (im Hilbertraum $H := L^2(G)$). Der §3 gibt einige Standardsätze zur schwachen unteren Halbstetigkeit ("weak lower semicontinuity") von S.

Die entscheidenden Schritte werden anschließend in §4 getan: Zunächst wird nachgewiesen, daß mit $u \in D(S)$ auch $u+t(\varphi-au) \in D(S)$ ist, falls $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $0<t<1$, $0<a<\frac{1}{2}$ (Lemma 4.2). Ein 'Regularitätssatz' liefert dann für jedes u mit $S(u)-(f,u) = \inf\{S(v)-(f,v); \|v\| \leq \|u\|\}$ die Aussagen:

$$p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha u \in L^1(G), \quad |\alpha| \leq m, \tag{2}$$

$$B[u] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha u \, dx - (f,u) \leq 0. \tag{3}$$

Schließlich ergibt das 'Differentiationslemma' 4.4:
Falls $S(u) - (f,u) \leq S(u+t(\pm\varphi-au)) - (f,u+t(\pm\varphi-au))$ ist für $0<a<\frac{1}{2}$ und $0<t<\delta(a,\varphi)$, so folgt

$$(4) \qquad B[u,\varphi] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha\varphi \, dx = (f,\varphi),$$

wobei $\varphi \in C_o^\infty(G)$ ist. Damit ist (für die hier betrachtete Klasse von Integralfunktionalen S) das Problem (P1) gelöst. Außerdem erhält man für alle u mit minimierender Eigenschaft, daß $u \in D(T+N)$ ist und $(T+N)(u)$ als Richtungsableitung von S aufgefaßt werden kann.

7.) Diese Hilfssätze lassen sich auf das Dirichletsche Randwertproblem sehr einfach anwenden (§5); dabei werden Resultate von Simader [65], Landes [39-41], Mustonen [51-54] und Webb [70], [71] teilweise verbessert. Falls $m>1$ ist, gibt es nämlich bislang kein Ergebnis, das für $p_\alpha g_\alpha$-Nichtlinearitäten ($|\alpha|\leq m$) mit den hier gestellten Voraussetzungen auskommt: $g_\alpha(t)t \geq 0$, für $|\alpha|=m$ G_α konvex, und $p_\alpha \in L^1_{loc}(G)$, nichtnegativ. Hier wirkt sich die besonders hohe Regularität der Probleme mit variationeller Struktur aus; der Gerechtigkeit halber sei bemerkt, daß man mit den sonst üblichen Methoden (Galerkin-Approximation, Abschneidemethoden, Theorie monotoner Operatoren, Orlicz-Sobolev-Räume oder Maximum-Prinzipien) diese Regularität nur zum Teil ausnützen kann, dafür jedoch nicht unbedingt die (formale) variationelle Struktur voraussetzen muß.

Etwas allgemeinere Klassen von Nichtlinearitäten werden ergänzend in §12 behandelt.

8.) Im 6. Paragraphen wird die Variationsmethode aus §4 benutzt, um ein Eigenwertproblem für den Operator T+N zu lösen. Dazu wird nachgewiesen, daß aus

(5) $\|u\| \leq r$ und $S(u) \leq S(v)$ für alle $v \in D(S)$ mit $\|v\| \leq r$

folgt: Es gibt ein $\lambda = \lambda(u) \in \mathbb{R}$ mit

(6) $$B[u,\varphi] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha \varphi \, dx = \lambda(u,\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Von dieser Stelle an muß freilich zusätzlich

$$t^{-1} g_\alpha(t) \to 0, \; t \to 0, \; \sigma_{ess}(T) \subset [0, \infty), \; \inf \sigma(T) < 0$$

verlangt werden.

Anschließend wird in §7 bewiesen, daß die $\lambda_r = \lambda(u_r)$ mit $r \to 0$ gegen λ_0, den tiefsten Eigenwert von T, konvergieren. Man kann nämlich wegen (3) zeigen, daß für $0 < r < r_0$

$$\|u_r\|^{-2} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_r) D^\alpha u_r \, dx \leq \text{const}$$

gilt (u_r nach (5) und (6)), und daraus auf

$$\|u_r\|^{-1} \cdot p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_r) \to 0 \text{ in } L^1_{loc}(G)$$

schließen (Lemma 7.2). Damit gelingt es, Ergebnisse in [10], [27], [28], [50], zumindest teilweise, zu verallgemeinern. Es sei bereits an dieser Stelle betont, daß man unter derart schwachen Voraussetzungen weder mit der Lusternik-Schnirelman-Theorie noch mit der Leray-Schauder-Theorie unmittelbar zum Zuge kommen kann.

9.) Der §8 basiert auf einem einfachen Lemma, das es erlaubt, aus $\int pg(u_n) u_n \, dx \leq \text{const}$ und $u_n \to u$ p.p. die Aussage

$$pg(u_n) \to pg(u) \quad \text{in } L^1_{loc}$$

zu folgern (vgl. de Figueiredo und Gossez [21]). Man kann damit zeigen, daß der Graph (einer Einschränkung) von T+N in H×H abgeschlossen ist, wobei freilich nur $p_\alpha g_\alpha$-Terme mit $|\alpha|<m$ vorkommen dürfen, und daß auch die Menge der Eigenwertparameter $\lambda(u)$ (nach (5) und (6)) abgeschlossen ist. Eine wichtige Folgerung daraus ist: Falls die minimierenden Funktionen u_r (nach (5)) für jedes feste $r>0$ eindeutig bestimmt sind, so hängen die Eigenwerte $\lambda(u_r)$ (nach (6)) stetig von r ab.

Für diese Eindeutigkeitsaussage bereitet der §9 einige Hilfsmittel vor: Es werden Bilinearformen B_u betrachtet, die Störungen der Form

$$p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha \varphi D^\alpha \psi$$

enthalten, $\tilde{g}_\alpha(t) := t^{-1} g_\alpha(t)$.

(Es ist klar, daß aus $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha u \in L^1(G)$ folgt: $p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u) \in L^1_{loc}(G)$.) Zwar ist es recht langatmig, zu zeigen, daß Formen des Typs

$$B_u[\varphi,\psi] := B[\varphi,\psi] + \sum_{|\alpha|\le m} \int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha \varphi D^\alpha \psi \, dx$$

durch Abschluß auf $C_o^\infty(G)$ gewonnen werden können, wenn $D(B_u)$ so groß gewählt wurde, daß die in den §§5 und 6 gefundenen Lösungen noch darin liegen. Dies erlaubt jedoch dann den Schluß, daß die Gleichungen

$$B[u,\varphi] + \sum_{|\alpha|\le m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha \varphi \, dx = \begin{cases} \lambda(u,\varphi) \\ (f,\varphi) \end{cases}$$

nicht nur für $\varphi \in C_o^\infty(G)$, sondern etwa auch für $\varphi = u$ gelten. Als 'Abfallprodukt' erhält man in Verbindung mit Katos Störungssatz VIII-3.6 in [34] die bemerkenswerte Aussage,

daß die Operatoren T_u, die nach dem 1. Darstellungssatz zu den Formen B_u gehören, im Sinne starker Resolventenkonvergenz gegen T konvergieren, falls $\|f\| \to 0$ oder $r \to 0$ geht.

10.) Schließlich wird in §10 unter (starken) Zusatzbedingungen gezeigt, daß die minimierenden u_r (nach (5)) für kleine r eindeutig bestimmt sind und daß es einen stetigen, bei λ_o entspringenden Zweig von Eigenwerten des Operators T+N gibt; die zugehörigen u_r hängen dabei stetig (in der $H^{m,2}$-Norm) von r ab. Der Beweis der Eindeutigkeit orientiert sich teilweise an Bazley und Zwahlen [3] und Lieb [44]. Die Einzelheiten sind in der Einleitung zu §10 ausführlich dargestellt.

11.) Ein Anhang enthält zunächst Bemerkungen zur Übertragung des 1. Darstellungssatzes auf T+N (§11) und anschließend einige Integralfunktionale komplizierterer Art, die ähnlich wie S in den §§3 und 4 behandelt werden können; hier wird von den Nichtlinearitäten nicht mehr die spezielle Gestalt $p_\alpha g_\alpha(.)$ verlangt.

12.) Abschließend seien noch einige Worte zur Terminologie gestattet: a) Die Entscheidung, von 'strengen' statt von 'starken' Nichtlinearitäten zu sprechen, wurde von Simaders Artikel [65] beeinflußt, war aber doch nicht leicht. In der (fast ausschließlich englischsprachigen) Literatur wird 'strong' und, als Gegensatz dazu, teils 'mildly nonlinear', teils 'weakly nonlinear' verwendet. Den Ausschlag gab am Ende, daß das Gegensatzpaar 'stark-schwach' schon anderweitig vielfach benützt wird, während 'streng-milde' noch gänzlich unverbraucht ist.

b) Die Bezeichnung 'Variationsmethode' deckt eine große Vielfalt von Gegenständen. Hier ist stets die sogenannte 'direkte Methode' gemeint (vgl. Morrey [49], p. 15 f.) und nicht etwa die Lusternik-Schnirelman-Theorie.

Mein herzlicher Dank richtet sich an Prof. Dr. E. Wienholtz und Prof. Dr. C.G. Simader (Bayreuth), denen ich die Einführung in das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen, vielfältige Anregungen und ausdauernde Ermutigung zu verdanken habe.

§1 Sesquilinearformen, lineare elliptische Differentialoperatoren und Sobolevräume

Dieser Paragraph hat rein vorbereitenden Charakter und enthält in komprimierter Form die wichtigsten Definitionen und einige Sätze über Sesquilinearformen, Sobolevräume und elliptische Differentialoperatoren. Das vorgestellte Material entstammt im wesentlichen den Monographien von Kato [34] und Adams [1] und beschränkt sich auf Geläufiges. Manche Sätze erscheinen mit Rücksicht auf die späteren Anwendungen in abweichender Version; in diesen Fällen ist ein Beweis angefügt, während wörtlich zitierte oder lediglich vereinfachte Hilfssätze ohne Beweis angegeben werden. Vereinfachungen gegenüber Kato treten insbesondere deshalb auf, weil die hier betrachteten Formen symmetrisch und die linearen Operatoren selbstadjungiert sein werden. Sinn dieser Zusammenstellung ist es lediglich, allzu häufige Verweisungen auf die beiden obengenannten Bücher zu vermeiden und die technischen Hilfsmittel 'griffbereit' zu haben, sodaß zugleich der Bequemlichkeit des Lesers wie auch der des Verfassers gedient sein soll.

Im folgenden bezeichne H stets einen Hilbertraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $(.,.)$ und Norm $\|.\|$. Für starke Konvergenz wird $\rightarrow$, für schwache $\longrightarrow$ geschrieben.

Def. 1.1 (vgl. Kato [34], p. 308 f.)
Sei $D \subset H$ ein linearer Teilraum. Eine Abbildung $t: D \times D \to \mathbb{C}$ heißt Sesquilinearform, falls $t[u,v]$ linear in $u \in D$ (für jedes feste $v \in D$) und antilinear in $v \in D$ (für jedes feste $u \in D$) ist. Falls H ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ ist, B eine in beiden Argumenten lineare Abbildung von $D \times D$ nach $\mathbb{R}$, dann heißt B Bilinearform. t heißt dicht definiert, falls D dicht in H liegt. t heißt symmetrisch, wenn $t[u,v] = \overline{t[v,u]}$ gilt für alle $u,v \in D$. Im Folgenden wird der Definitionsbereich D von t mit $D(t)$ bezeichnet.

Bem. 1.2
Im komplexen Hilbertraum gilt: t ist symmetrisch genau dann, wenn $t[u] := t[u,u] \in \mathbb{R}$ ist für alle $u \in D(t)$. Alle nun folgenden Aussagen gelten auch für Bilinearformen B.

Def. 1.3
Eine symmetrische Form t heißt halbbeschränkt (nach unten), wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $t[u] \geq c \|u\|^2$ für alle $u \in D(t)$.

Def. 1.4
Sei t eine Form. Eine Folge $(u_n) \subset D(t)$ heißt t-konvergent (gegen $u \in H$), falls $u_n \to u$, $n \to \infty$, und $t[u_n - u_m] \to 0$ mit $n,m \to \infty$. Bezeichnungsweise: $u_n \xrightarrow[t]{} u$.

Def. 1.5
Eine Form t auf $D(t)$ heißt abgeschlossen, falls $u_n \xrightarrow[t]{} u$ impliziert, daß $u \in D(t)$ und $t[u_n - u] \to 0$ gilt.

Def. 1.6
Eine Form t auf $D(t)$ heißt abschließbar, wenn sie eine

abgeschlossene Fortsetzung besitzt (d.h. wenn es eine abgeschlossene Form t' auf $D(t') \supset D(t)$ gibt mit $t'[u,v] = t[u,v]$ für alle $u,v \in D(t)$.

Satz 1.7 (vgl. [34], Theorem VI-1.17)
Eine symmetrische Form t ist abschließbar genau dann, wenn $u_n \xrightarrow{t} 0$ impliziert: $t[u_n] \to 0$. Falls diese Bedingung erfüllt ist, kann man die Abschließung $\tilde{t}$ von t in der folgenden Weise definieren: $D(\tilde{t})$ ist die Menge derjenigen $u \in H$, für die es eine Folge $(u_n) \subset D(t)$ gibt mit $u_n \xrightarrow{t} u$.
Es ist $\tilde{t}[u,v] = \lim t[u_n,v_n]$ für alle Folgen (u_n), (v_n) mit $u_n \xrightarrow{t} u$ und $v_n \xrightarrow{t} v$. Jede abgeschlossene Fortsetzung von t ist auch eine Fortsetzung von $\tilde{t}$.

Satz 1.8 (Theorem VI-1.11 in [34])
Sei t eine symmetrische und halbbeschränkte Form. Sei $c \in \mathbb{R}$ so groß, daß $t[u]+c\|u\|^2 \geq 0$ ist, $\forall u \in D(t)$. Sei $c' > c$. Dann ist $D(t)$ ein Prähilbertraum bezüglich des Skalarprodukts $(u,v)_t := t[u,v] + c'(u,v)$; dieses Skalarprodukt hängt natürlich von der Wahl von c' ab. Weiter gilt: t ist abgeschlossen genau dann, wenn der Prähilbertraum $\big(D(t), (.,.)_t\big)$ vollständig, also ein Hilbertraum ist. Die durch das Skalarprodukt $(.,.)_t$ induzierte Norm wird mit $\|.\|_t$ bezeichnet.

Bem. 1.9
Die Problematik bei der Abschließung einer auf D erklärten Form t besteht also grob gesagt darin, einen Definitionsbereich $\tilde{D} \supset D$ anzugeben, der einesteils groß genug ist (nämlich mit dem durch t induzierten Skalarprodukt einen Hilbertraum ergibt), andererseits jedoch eine widerspruchsfreie Definition von $\tilde{t}[u]$ für alle $u \in \tilde{D}$ erlaubt; nach

Satz 1.7 muß nämlich gelten: $t[u] = \lim t[u_n]$, falls $u_n \xrightarrow{t} u$.

Satz 1.10 (Cor. VI-1.16 in Kato [34])
Die Form t sei auf $D(t)$ symmetrisch, halbbeschränkt und abgeschlossen. Sei $(u_n) \subset D(t)$ mit $t[u_n] \leq$ const. und $\|u_n\| \leq$ const. Dann gibt es ein $u \in D(t)$ und eine Teilfolge $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ mit $u_{n_j} \longrightarrow u$ und $u_{n_j} \xrightarrow{t} u$ (d.h.: für alle $v \in D(t)$ gilt $(u_{n_j}, v)_t \longrightarrow (u,v)_t$).
Falls darüberhinaus $t \geq 0$ ist, folgt

$$t[u] \leq \liminf t[u_{n_j}] .$$

Da dieser Satz in der Aussage leicht von Kato abweicht, soll der Beweis gegeben werden.

Beweis (vgl. Kato [34], p. 325)
Wegen (u_n) beschränkt im Hilbertraum H gibt es ein $u \in H$ und $(u_{n_1}) \subset (u_n)$ mit $u_{n_1} \longrightarrow u$.
Sei $\varepsilon > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $t + c \geq \varepsilon$. Wegen $(t+c)[u_{n_1}] \leq$ const. gibt es ein $v \in D(t)$ und $(u_{n_j}) \subset (u_{n_1})$ mit $u_{n_j} \xrightarrow{t} v$,
denn $D(t)$ ist bezüglich des durch $t+c$ induzierten Skalarprodukts ein Hilbertraum. Es bleibt $v = u$ zu zeigen:
Wendet man im Hilbertraum $D(t)$ den Satz von Banach-Saks an, so erhält man eine Teilfolge $(u_{n_m}) \subset (u_{n_j})$ derart, daß für $v_k := k^{-1} \sum_{m=1}^{k} u_{n_m}$ gilt: $v_k \xrightarrow{t} v$. Wegen $u_{n_m} \longrightarrow u$ folgt $v_k \longrightarrow u$. $v_k \xrightarrow{t} v$ bedeutet aber

$(t+c)\left[v_k - v\right] \to 0$, woraus wegen $t+c \geq \varepsilon > 0$ auch $v_k - v \to 0$ folgt. Zusammen mit $v_k \longrightarrow u$ erhält man daher $v = u$. [1)]

Nun zum 2. Teil der Behauptung: Falls $t \geq 0$ ist, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$ $\quad (t+\varepsilon)\left[u\right] \geq \varepsilon \|u\|^2$ für alle $u \in D(t)$.

Nun gilt aber in jedem Hilbertraum: $x_n \longrightarrow x \Longrightarrow \|x\| \leq$ $\leq \liminf \|x_n\|$ (vgl. z. Bp. Yosida [73], p. 120, Th. 1). Also ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$(t+\varepsilon)[u] \leq \liminf\, (t+\varepsilon)[u_{n_j}],$$

oder

$$t[u] \leq \liminf\, t[u_{n_j}] + \varepsilon \cdot \limsup \|u_{n_j}\|^2.$$

Da die Folge (u_n) beschränkt ist, erhält man mit $\varepsilon \to 0$ die Behauptung. QED

Def. 1.11 (Kato [34], p. 317)

Sei t eine abschließbare Form. Ein linearer Teilraum $V \subset D(t)$ heißt core ("Kernbereich") von t, falls $(t|V)^{\sim} = t$ ist.

Lemma 1.12

Sei t eine symmetrische, halbbeschränkte und abschließbare Form und $V \subset D(t)$ ein linearer Teilraum. Zu jedem $u \in D(t)$ gebe es eine Folge $(u_n) \subset V$ mit $u_n \longrightarrow u$ und $t[u_n] \leq$ const. Dann ist V ein core von t.

Beweis

Mit t ist auch $t|V$ abschließbar und $(t|V)^{\sim}$ abgeschlossen.

[1)] Dieser Beweis, der, im Gegensatz zu Kato (a.a.O.), den 1. Darstellungssatz nicht verwendet, wurde dem Verfasser von Prof. E. Wienholtz mitgeteilt.

Sei $u \in D(t)$, $(u_n) \subset V$ mit $u_n \longrightarrow u$ und $t[u_n] \leq \text{const.}$ $(t|V)^{\sim}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1.10, sodaß $u \in D((t|V)^{\sim})$ folgt. Also ist $D(t) \subset D((t|V)^{\sim})$ und, nach Definition der Abschließung, sogar $D(\tilde{t}) \subset D((t|V)^{\sim})$. Da $D(t|V) \subset D(t)$, folgt trivialerweise $D(\tilde{t}) \supset D((t|V)^{\sim})$, insgesamt also $D(\tilde{t}) = D((t|V)^{\sim})$. Da t abschließbar ist, muß nach Satz 1.7 auch stets $(t|V)^{\sim}[u,v] = \tilde{t}[u,v]$ sein. QED

Ein besonders handliches Kriterium für die Abschließbarkeit von Formen liefert folgender Satz von M. Schechter:

Satz 1.13 (Kato [34], Th. VI-1.27)
Der Operator T sei symmetrisch und halbbeschränkt. Dann ist die durch $t[u,v] := (Tu,v)$ für $u,v \in D(T)$ definierte Form abschließbar.

Bezeichnungen 1.14
Für $N \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{R}^N$ der N-dimensionale Euklidische Raum und $G \subset \mathbb{R}^N$ offen. Weiter seien $\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ Multiindizes, d.h. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, und $|\alpha| := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$. Die Relation $\beta \leq \alpha$ wird komponentenweise definiert durch $\beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, \ldots, N$.
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $C^k(G)$ die Menge der auf G k-mal stetig differenzierbaren Funktionen.
$C^{\infty}(G)$ sei der Durchschnitt aller $C^k(G)$,
$C_b^{\infty}(G) := \{ \varphi \in C^{\infty}(G)$; alle partiellen Ableitungen von φ sind beschränkt $\}$, und
$C_0^{\infty}(G) := \{ \varphi \in C^{\infty}(G)$; supp φ ist kompakt und in G enthalten $\}$,

wobei supp $\varphi := \overline{\{ x \in G ; \varphi(x) \neq 0 \}}$ ist. Wie üblich sei für $B \subset \mathbb{R}^N$ $\overline{B}$ die Abschließung, $\overset{\circ}{B}$ der offene Kern, $\partial B := \overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}$ der Rand von B.

Für $A \subset G$ bezeichne $A^c := G \setminus A$, falls keine Mißverständnisse möglich sind. Für beschränktes, meßbares $K \subset \mathbb{R}^N$ sei $\mu(K) := \int_K dx$ das Lebesgue-Maß von K. Daß Eigenschaften oder Aussagen fast überall gelten, wird durch die Abkürzung "p.p." ausgedrückt. Für $A,B \subset \mathbb{R}^N$ bedeutet die Abkürzung $A \subset\subset B$, daß A und B offen sind, $\overline{A}$ kompakt ist mit $\overline{A} \subset B$.

Das Differentiationssymbol D^α ist definiert durch

$D^\alpha \varphi := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} (\frac{\partial}{\partial x_2})^{\alpha_2} \ldots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_N} \varphi$ für $\varphi \in C^k(G)$ mit $k \geq |\alpha|$. Für $\xi \in \mathbb{C}^N$ sei $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \xi_N^{\alpha_N}$.

Für $1 \leq p < \infty$ sei $L^p(G)$ der Banachraum der (Äquivalenzklassen von) meßbaren Funktionen f, für die $|f|^p$ über G integrierbar ist bezügl. des Lebesguemaßes dx. Die Norm wird mit $\|.\|_p = \|.\|_{L^p(G)}$ bezeichnet. Entsprechend sei $L^p_{loc}(G)$ die Menge derjenigen auf G meßbaren Funktionen f, für die $f \cdot \chi_K \in L^p(G)$ ist für alle $K \subset\subset G$.

Dabei ist $\chi_K(x) = 1$, falls $x \in K$ und 0 sonst.

$f|K$ ist die Restriktion von f auf K.

Schließlich sei $L^\infty(G)$ die Menge derjenigen auf G meßbaren Funktionen u, für die eine Konstante c_u existiert, mit $|u| \leq c_u$ p.p.; das Infimum aller zu u gehörigen Konstanten c_u wird mit ess sup $u =: \|u\|_\infty$ bezeichnet.

Beispiel 1.15

Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen und $m \in \mathbb{N}$. Für $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m$ seien Funktionen $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}} \in C^m(G)$ gegeben. Wenn die auf $C_o^\infty(G)$

im Hilbertraum $H := L^2(G)$ durch

$$t[\varphi,\psi] := \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \int_G D^\alpha\varphi \; a_{\alpha\beta} \; D^\beta\overline{\psi} \, dx$$

gegebene Form

halbbeschränkt ist, dann ist sie abschließbar.

Beweis

Wegen $a_{\alpha\beta} = \overline{a_{\alpha\beta}}$ ist der auf $C_o^\infty(G)$ durch

$$T(\varphi) := \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} (-1)^{|\beta|} \, D^\beta(\, a_{\alpha\beta} \, D^\alpha\varphi \,)$$

definierte Operator symmetrisch und, nach Voraussetzung, halbbeschränkt. Daher folgt die Behauptung aus Satz 1.13. QED

Beispiel 1.16

Im Unterschied zu Beispiel 1.15 seien die $a_{\alpha\beta} = \overline{a}_{\beta\alpha}$ nur meßbar; es gebe jedoch Funktionen $b_{\alpha\beta} = \overline{b_{\beta\alpha}} \in C^m(G)$ und Konstanten c_o, $c_1 \in \mathbb{R}$, sodaß mit

$$\mathfrak{s}[\varphi] := \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \int_G D^\alpha\varphi \; b_{\alpha\beta} \; D^\beta\overline{\varphi} \, dx$$

gilt: $c_o\|\varphi\|^2 \le \mathfrak{s}[\varphi] \le t[\varphi] \le c_1 \, \mathfrak{s}[\varphi]$, für alle $\varphi \in C_o^\infty(G)$, wobei t wie in 1.15 definiert ist. Dann ist t abschließbar.

Beweis

Nach 1.15 ist $\mathfrak{s}$ abschließbar. Sei $(\varphi_n) \subset C_o^\infty(G)$ mit $\varphi_n \to 0$ und $t[\varphi_n - \varphi_m] \to 0$, $n,m \to \infty$. Mit der Voraussetzung ergibt sich dann aber auch $\mathfrak{s}[\varphi_n - \varphi_m] \to 0$. Wegen der Abschließbarkeit von $\mathfrak{s}$ folgt daher mit Satz 1.7 $\mathfrak{s}[\varphi_n] \to 0$. Daher muß auch $t[\varphi_n] \to 0$ gelten, sodaß die Behauptung aus Satz 1.7 folgt. QED

Beispiel 1.17

Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen und $q \in L^1_{loc}(G)$ mit $q \geq 0$. Sei wieder $H := L^2(G)$. Dann ist die Form $t[u,v] :=$

$$:= \int_G q\, u\, \bar{v}\, dx \quad \text{mit } u,v \in \{ w \in H \,;\, \int_G q|w|^2\, dx < \infty \}$$

abschließbar.

Beweis

Wegen $\sqrt{q} \in L^2_{loc}(G)$ ist $S := \sqrt{q}\,|C_0^\infty(G)$ ein dichtdefinierter, symmetrischer und halbbeschränkter Operator. Daher ist der adjungierte Operator S^* abgeschlossen (vgl. Kato [34], Theorem III-5.28). Da $D(S^*) = \{ f \in H \,;\, \sqrt{q} f \in H \} = \{ f \in H \,;\, \int_G q\,|f|^2\, dx < \infty \}$ gilt, folgt

$t[u,v] = (S^*u, S^*v)$ für alle $u,v \in D(t)$. Daher ergibt sich aus $u_n \xrightarrow[t]{} 0$, daß $u_n \to 0$ und $\|S^*u_n - S^*u_m\| \to 0$ gilt. Also ist (S^*u_n) eine konvergente Folge; aus der Abgeschlossenheit von S^* folgt aber $S^*u_n \to 0$, mithin auch $t[u_n] \to 0$, woraus mit Satz 1.7 die Behauptung folgt. QED

Satz 1.18 (Kato [34], Theorem VI-1.33)

Sei t symmetrisch und halbbeschränkt, t' symmetrisch auf $D(t') \supset D(t)$; es gebe Zahlen $0 \leq b < 1$ und $0 < a$ mit $|t'[u]| \leq b\, t[u] + a\, \|u\|^2$ für alle $u \in D(t)$. Dann gilt:

a) Falls t abschließbar ist, ist auch $(t + t')|D(t)$ abschließbar und es ist $D((t + t')^\sim) = D(t)$.

b) Falls t abgeschlossen, so ist auch $t + t'$ abgeschlossen.

Beispiel 1.19 (vgl. Kato [34], p. 348-352)

Sei $G := \mathbb{R}^3$ und $H := L^2(G)$. Die 'Dirichlet'-Form

sei definiert durch

$$t[\varphi] := \int_G \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right|^2 dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Sei $q = q_1 + q_2 + q_3$ mit $q_1 \in L^1_{loc}(G)$, $q_1 \geq 0$; weiter sei

$\int_{\{|x-y|<1\}} |x-y|^{-1-\delta}|q_2(y)|\,dy$ beschränkt auf G für ein $\delta > 0$,

während sich q_3 schreiben läßt als endliche Summe von Termen der Gestalt $e_j|x-a_j|^{-2}$, wobei die Summe der $|e_j|$ für negative e_j kleiner als 1/4 sein soll.

Definiert man nun auf $C_0^\infty(G)$ die Formen

$v_i[\varphi] := \int_G q_i |\varphi|^2 dx$, i=1,2,3, so folgt, daß es Zahlen a>0 und 0<b<1 gibt mit

$$|v_2[\varphi] + v_3[\varphi]| \leq b\, t[\varphi] + a\,\|\varphi\|^2.$$

Der Beweis findet sich bei Kato a.a.O.

Wegen $v_1 \geq 0$ kann man auf der rechten Seite dieser Ungleichung t durch $t + v_1$ ersetzen. Nun ist aber t nach Beispiel 1.15 abschließbar, während v_1 nach Beispiel 1.17 abschließbar ist. Die Summe abschließbarer, halbbeschränkter Formen ist jedoch auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche der Summanden abschließbar; dies ist eine einfache Konsequenz aus Satz 1.7. Mithin ist $t + v_1$ auf $C_0^\infty(G)$ abschließbar. Damit ist Satz 1.18 anwendbar und es folgt:

$t + v_1 + v_2 + v_3$ ist abschließbar. Die (einfache) Übertragung auf den $\mathbb{R}^N$ soll hier nicht gegeben werden. QED

Satz 1.13 zeigt, daß zu jedem selbstadjungierten und halbbeschränkten Operator T eine symmetrische, halbbeschränkte, dicht definierte und abschließbare Form gehört. Es gilt jedoch auch die Umkehrung:

Satz 1.20 (1. Darstellungssatz, Theorem VI-2.1 in [34])
Sei t eine dicht definierte, abgeschlossene, symmetrische und halbbeschränkte Form in H. Dann gibt es einen selbstadjungierten und halbbeschränkten Operator T, sodaß

i) $D(T) \subset D(t)$ und
$t[u,v] = (Tu,v)$ für alle $u \in D(T)$, $v \in D(t)$.

ii) $D(T)$ ist ein core von t.

iii) Falls $u \in D(t)$, $w \in H$ und $t[u,v] = (w,v)$ gilt für alle v aus einem core von t, dann ist $u \in D(T)$ und $Tu = w$.

Der selbstadjungierte und halbbeschränkte Operator T ist durch die Bedingung i) eindeutig bestimmt.

Lemma 1.21
Es seien t und T wie in Satz 1.20. $\sigma(T)$ bezeichne das Spektrum von T, d.h. $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} ; T - \lambda$ ist nicht stetig invertierbar.$\}$. Dann gilt:

a) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

b) $\inf \sigma(T) = \inf \{ t[u] ; u \in D(t), \|u\| = 1 \}$.

Beweis
a) Kato [34], Th. V-3.16
b) Kato [34], p. 278

Definition 1.22 (Sobolevräume; vgl. Adams [1], p.44 f.)
Seien $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann sei

$$W^{m,p}(G) := \{ f \in L^p(G) ; \text{ zu } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ gibt es } f_\alpha \in L^p(G) \text{ mit } \int f D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int f_\alpha \varphi \, dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(G) \}.$$

$W^{m,p}(G)$ ist ein Banachraum unter der Norm

$$\|f\|_{m,p} := \|f\|_{W^{m,p}(G)} := \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_p^p \Big)^{1/p}.$$

Da f_α eindeutig bestimmt ist, ist die folgende Bezeichnung sinnvoll: Für $f \in W^{m,p}(G)$ und $|\alpha| \leq m$ sei $D^\alpha f := f_\alpha$. Schließlich sei $H_o^{m,p}(G)$ definiert als Abschluß von $C_o^\infty(G)$ unter der $\|.\|_{m,p}$-Norm.

Lemma 1.23

Sei t eine symmetrische, halbbeschränkte und abgeschlossene Form auf $D(t) \subset H_o^{m,2}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^N$ offen. Der zu Grunde gelegte Hilbertraum sei $L^2(G)$. Dann gibt es c_1, $c_2 > 0$ mit

$$\|u\|_{m,2}^2 \leq c_1\, t[u] + c_2 \|u\|^2, \text{ für alle } u \in D(t).$$

Falls sogar $D(t) = H_o^{m,2}(G)$ gilt, dann gibt es ein $c > 0$ mit

$$t[u] \leq c\, \|u\|_{m,2}^2 \text{ , für alle } u \in D(t).$$

Beweis

Definiert man auf $C_o^\infty(G)$ die Form s durch

$$s[\varphi] := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G |D^\alpha \varphi|^2 \, dx = \|\varphi\|_{m,2}^2,$$

so ist s abschließbar (nach Beispiel 1.15), und es ist $D(s) = H_o^{m,2}(G)$. Schränkt man s auf D(t) ein, so kann man $s|D(t)$ als Form auf dem Hilbertraum $\big(D(t), (.,.)_t \big)$ auffassen. Nach Theorem VI-1.20 in Kato [34] ist $s|D(t)$ eine beschränkte Form im Hilbertraum D(t); dies ist eine Konsequenz aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. Also gilt $s[u] \leq c_o (t+c)[u]$, für alle $u \in D(t)$. Daraus folgt aber die erste Behauptung. Im Falle $D(t) = H_o^{m,2}(G)$ kann man umgekehrt t als Form auf dem Hilbertraum $\big(D(s), (.,.)_s \big)$ auffassen und dann wie oben weiterschliessen. QED

Lemma 1.24

Sei t eine symmetrische, halbbeschränkte und abgeschlossene Form auf $D(t) \subset H_o^{m,2}(G)$ im Hilbertraum $L^2(G)$.
Sei $(u_n) \subset D(t)$ mit $\|u_n\| \leq$ const. und $t[u_n] \leq$ const.
Dann gibt es ein $u \in L(t)$ und eine Teilfolge $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ mit:

1) $u_{n_j} \longrightarrow u$, 2) $u_{n_j} \xrightarrow{t} u$, 3) $D^\alpha u_{n_j} \longrightarrow D^\alpha u$, $|\alpha| \leq m$,

4) $D^\alpha u_{n_j} \longrightarrow D^\alpha u$, $|\alpha| < m$, 5) $D^\alpha u_{n_j} \xrightarrow{p.p.} D^\alpha u$, $|\alpha| < m$.
$L^2_{loc}(G)$

Beweis

Nach Satz 1.10 gibt es eine Teilfolge $(u_{n_1}) \subset (u_n)$, die 1) und 2) erfüllt. Nach Lemma 1.23 ist $\|u_{n_1}\|_{m,2} \leq$ const, folglich $D^\alpha u_{n_1}$ beschränkt für $|\alpha| \leq m$. Also gibt es für $|\alpha| \leq m$ Funktionen $v_\alpha \in H$ und eine Teilfolge $(u_{n_k}) \subset (u_{n_1})$ mit $D^\alpha u_{n_k} \longrightarrow v_\alpha$. Es ist $v_\alpha = D^\alpha u$ zu zeigen: Wegen $u, u_{n_1} \in H_o^{m,2}(G)$ gilt für alle $\varphi \in C_o^\infty(G)$ und $|\alpha| \leq m$

$$\int D^\alpha u\, \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int u\, D^\alpha \varphi\, dx = \lim (-1)^{|\alpha|} \int u_{n_k} D^\alpha \varphi\, dx =$$

$$= \lim \int D^\alpha u_{n_k} \varphi\, dx = \int v_\alpha\, \varphi\, dx, \text{ also } v_\alpha = D^\alpha u, \text{ da}$$

$C_o^\infty(G)$ dicht in H ist. Damit ist 3) gezeigt. Sei nun für $n \in \mathbb{N}$ $K_n \subset\subset G$, ∂K_n glatt, und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = G$. Nach dem Rellich-Kondrachovschen Kompaktheitssatz gibt es eine Teilfolge $(u_{n_m}) \subset (u_{n_1})$, sodaß $D^\alpha u_{n_m}|K_1 \longrightarrow D^\alpha u|K_1$ für $|\alpha| < m$.
$L^2(K_1)$

Unter sukzessiver Teilfolgenauswahl wendet man nun dieses Argument auf alle K_n an und erhält 4), indem man schließlich zur Diagonalfolge übergeht. Die Aussage 5) ist eine

einfache Folgerung aus 4), denn die starke Konvergenz in $L^2(K_n)$ impliziert (modulo Teilfolgenauswahl) p.p.-Konvergenz in K_n. Also erhält man 5) durch sukzessive Teilfolgenauswahl und Übergang zur Diagonalfolge. QED

Bemerkung 1.25

Die im Titel dieser Arbeit angesprochene Elliptizität findet ihren Niederschlag funktionalanalytisch in der Voraussetzung, daß $D(\tilde{t}) \subset H_0^{m,2}(G)$ sein soll. Dies erreicht man in der Praxis durch Definitheitsvoraussetzungen an die $a_{\alpha\beta}$ (vgl. Beispiel 1. 15, 1.16), wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 1.26 (Gardingsche Ungleichung; Yosida [73],p.175f)

Sei G ein beschränktes Gebiet, t wie in Beispiel 1.16, jedoch mit $a_{\alpha\beta} \in C^0(\bar{G})$ (d.h. stetig bis auf den Rand von G). Mit einem $c_0 > 0$ gelte für alle $x \in G$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta| = m} a_{\alpha\beta}\, \xi^{\alpha}\, \xi^{\beta} \geq c_0 |\xi|^2 .$$

Dann gibt es $c, C > 0$ mit

$$\|\varphi\|_{m,2}^2 \leq c\, t[\varphi] + C\|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(G) .$$

Dieser Satz wird bei Yosida a.a.O. bewiesen. Es ist klar, daß dann $D(\tilde{t}) \subset \overset{\circ}{H}{}_0^{m,2}(G)$ ist. Für unbeschränktes G kann man z. Bp. von einfachen Formen t_0 ausgehen, für die $D(\tilde{t}_0) \subset H_0^{m,2}(G)$ unmittelbar ersichtlich ist, und dann mit Hilfe von Interpolationsungleichungen (vgl. Adams [1], Theorem 4.13, p. 73) und dem Störungssatz 1.18 zu komplizierteren Gebilden übergehen.

Satz 1.27 (Kato [34], Theorem VIII-3.6, Cor. VIII-1.4)
Seien t_n, n=1,2,... und t dicht definierte, symmetrische, halbbeschränkte und abgeschlossene Formen mit den folgenden Eigenschaften:

i) $D(t_n) \subset D(t)$, n=1,2,...

ii) $t_n[u] \geq t[u]$ für alle $u \in D(t_n)$, n=1,2,...

iii) Es gibt einen core D von t, sodaß $D \subset D(t_n)$ ist für fast alle n und $\lim t_n[u] = t[u]$ falls $u \in D$.

Seien T_n und T die zu t_n und t gehörigen selbstadjungierten und halbbeschränkten Operatoren (siehe Satz 1.20).
Dann konvergieren die T_n stark gegen T im verallgemeinerten Sinne $T_n \xrightarrow{s} T$, d. h. für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt:
$\| (T-\lambda)^{-1}x - (T_n-\lambda)^{-1}x \| \to 0$ für alle $x \in H$ ('starke Resolventenkonvergenz').

Satz 1.28 (Das minimax-Prinzip für Sesquilinearformen; Reed und Simon [61], p. 76-78, Theorems XIII.1, XIII.2)
Sei t eine symmetrische, halbbeschränkte, dicht definierte und abgeschlossene Form, T der zugehörige selbstadjungierte und halbbeschränkte Operator nach Satz 1.20. Sei

$$\lambda_n(T) := \sup \left\{ U_T(\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}) \; ; \; (\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}) \in H^n \right\}$$

mit

$$U_T(\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}) := \inf \{ t[u] \; ; \; u \in D(t), \|u\| = 1, (u,\varphi_i)=0, i=0,\dots,n-1 \}.$$

Dann gilt für jedes feste $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ entweder
(a) es gibt n+1 Eigenwerte (wobei entartete Eigenwerte je nach Vielfachheit mehrfach gezählt werden) unterhalb

des wesentlichen Spektrums von T, und $\lambda_n(T)$ ist der (n+1)-te (wiederholte) Eigenwert;

oder

(b) $\lambda_n(T)$ ist die untere Grenze des wesentlichen Spektrums von T und es gibt höchstens n Eigenwerte unterhalb von λ_n. In diesem Falle gilt $\lambda_n = \lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \ldots\ldots$

Korollar 1.29

Seien t und s zwei Formen, die den Voraussetzungen von Satz 1.28 genügen, mit $s \geq t$. Seien T und S die zugehörigen selbstadjungierten und halbbeschränkten Operatoren und $\lambda_n(T)$, $\lambda_n(S)$ wie in Satz 1.28. Dann gilt:

a) $\lambda_n(S) \geq \lambda_n(T)$, n=0,1,...

b) $\inf \sigma_{ess}(S) \geq \inf \sigma_{ess}(T)$.

Beweis

a) Wegen $D(s) \subset D(t)$ ist für beliebige $\varphi_0,\ldots,\varphi_m \in H$

$$\{ u \in D(s) \; ; \; (u,\varphi_i)=0, \; i=0,\ldots,m \} \subset$$

$$\subset \{ u \in D(t) \; ; \; (u,\varphi_i)=0, \; i=0,\ldots,m \}.$$

Also gilt (mit den Bezeichnungen von Satz 1.28)

$$U_T(\varphi_0,\ldots\varphi_m) = \inf \{ t[u] \; ; \; u \in D(t), \; \|u\|=1, \; (u,\varphi_i)=0, \; 0 \leq i \leq m \} \leq$$

$$\leq \inf \{ t[u] \; ; \; u \in D(s), \; \|u\|=1, \; (u,\varphi_i)=0, \; 0 \leq i \leq m \} \leq$$

$$\leq \inf \{ s[u] \; ; \; u \in D(s), \; \|u\|=1, \; (u,\varphi_i)=0, \; 0 \leq i \leq m \} =$$

$$= U_S(\varphi_0,\ldots,\varphi_m).$$

Mithin

$$\sup_{\varphi_0,\ldots,\varphi_m} U_T(\varphi_0,\ldots,\varphi_m) \leq \sup_{\varphi_0,\ldots,\varphi_m} U_S(\varphi_0,\ldots,\varphi_m).$$

b) Da T halbbeschränkt ist, gibt es zu $c_\varepsilon :=$
$:= \min \{ \inf \sigma_{ess}(T) - \varepsilon, \varepsilon^{-1} \}$, $\varepsilon>0$, höchstens endlich viele $\lambda_n(T)$ mit $\lambda_n(T) \leq c_\varepsilon$. Also gibt es wegen $\lambda_n(S) \geq \lambda_n(T)$ höchstens endlich viele $\lambda_n(S)$ mit $\lambda_n(S) \leq c_\varepsilon$. Daraus folgt aber sofort die Behauptung. QED

Lemma 1.30

Seien t und T wie in Satz 1.28. Es sei $\lambda_o := \inf \sigma(T)$ ein einfacher Eigenwert von T (d.h. $\lambda_1(T) > \lambda_o(T) = \lambda_o$). Sei u die Eigenfunktion zu λ_o. Dann gilt für alle $w \in D(t)$ mit $0 \neq w \neq cu$: $t[w] > \lambda_o \|w\|^2$.

Beweis

Angenommen, es gäbe ein $w \in D(t)$ mit $w \neq cu$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und $t[w] = \lambda_o \|w\|^2$; o. E. sei $\|w\| = 1$.
Nach Lemma 1.21 b) gilt nun für alle $v \in D(t)$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$t[w+tv] \geq \lambda_o \|w+tv\|^2$, oder

$$t[w] + 2t[w,v] + t^2 t[v] \geq \lambda_o \|w\|^2 + 2t\lambda_o(w,v) + t^2 \lambda_o \|v\|^2,$$

mithin

$$2t \, (\, t[w,v] - \lambda_o(w,v) \,) \geq t^2 \, (\, \lambda_o \|v\|^2 - t[v] \,) \, .$$

Mit $t \to 0+$ folgt daraus $t[w,v] - \lambda_o(w,v) \geq 0$,
während man mit $t \to 0-$ die umgekehrte Abschätzung
$t[w,v] - \lambda_o(w,v) \leq 0$ erhält, zusammen also

$$t[w,v] - \lambda_o(w,v) = 0, \text{ für alle } v \in D(t).$$

Mit Satz 1.20 folgt daraus aber $w \in D(T)$ und $Tw = \lambda_o w$, sodaß die Dimension des Eigenraums von T zum Eigenwert λ_o mindestens 2 sein müßte, im Widerspruch zur Voraussetzung.

QED

Def. 1.31 (Friedrichssche Glättung; vgl. Adams [1], p.29) Sei j eine reellwertige, nichtnegative $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-Funktion mit den Eigenschaften (i) $j(x) = 0$ für $|x| > 1$ und (ii) $\int j(x)\,dx = 1$. Für $\varepsilon>0$ sei $j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-N} j(x/\varepsilon)$. Dann ist für $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ die Glättung von u definiert durch $j_\varepsilon * u :=$ $:= \int j_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,dy$. Falls eine Funktion u zunächst nur auf einem Teilgebiet G definiert ist, setzt man u durch 0 außerhalb von G fort und wendet dann den Glättungsoperator an, falls die fortgesetzte Funktion in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ liegt.

Satz 1.32 (Eigenschaften der Friedrichsschen Glättung) Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann gilt:

a) $u \in L^p(G)$, $1 \le p < \infty \Longrightarrow j_\varepsilon * u \in L^p(G)$, $\|j_\varepsilon * u\|_p \le \|u\|_p$ und $\|u - j_\varepsilon * u\|_p \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

b) Sei $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty \Longrightarrow j_\varepsilon * u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ und für $|\alpha| \le m$ ist $D^\alpha(j_\varepsilon * u) = j_\varepsilon * D^\alpha u$.

c) Sei $G' \subset\subset G$, $u \in W^{m,p}(G)$, $1 \le p < \infty \Longrightarrow$ $j_\varepsilon * u \to u$ in $W^{m,p}(G')$ mit $\varepsilon \to 0$.

d) Falls $u \in L^1(G)$, supp u kompakt, supp $u \subset G$, so ist für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial G)$ $j_\varepsilon * u \in C_0^\infty(G)$.

e) Falls $u \in L^p(G)$, $1 \le p \le \infty$, dann ist $j_\varepsilon * u \in C_b^\infty(G)$.

Beweis

a) Adams [1], Lemma 2.18 c. b) [1], Lemma 3.15; die Formel $D^\alpha(j_\varepsilon * u) = j_\varepsilon * D^\alpha u$ erscheint im Beweis zu diesem Lemma. c) [1], Lemma 3.15. d) [1], Lemma 2.18 b. e) Nach [1], Lemma 2.18 a ist $j_\varepsilon * \hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\hat{u}(x) := u(x)$ für $x \in G$ und $\hat{u}(x) := 0$ sonst. Weiter kann man für $1 < p < \infty$ nach der Hölderschen Ungleichung abschätzen: $|D^\alpha(j_\varepsilon * u)(x)| =$

$$= |D_x^\alpha \int_G j_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy| = |\int_G D_x^\alpha j_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy| \leq$$

$$\leq \int_{|x-y|\leq\varepsilon} |(D^\alpha j_\varepsilon)(x-y)|\, |u(y)|\, dy \leq$$

$$\leq \Big(\int_{|x-y|\leq\varepsilon} |(D^\alpha j_\varepsilon)(x-y)|^q dy \Big)^{1/q} \cdot \Big(\int_{|x-y|\leq\varepsilon} |u(y)|^p dy \Big)^{1/p} \leq$$

$\leq c_\alpha \|u\|_p$, mit $1/q + 1/p = 1$. Für $p = 1$ oder $p = \infty$ schätzt man analog ab durch L^1-Norm und ess sup. QED

§2 Eine Klasse quasilinearer elliptischer Differentialoperatoren vom variationellen Typ.

In diesem Paragraphen wird eine Klasse einfacher nichtlinearer Funktionale und Operatoren eingeführt; Hinweise auf mögliche Verallgemeinerungen bleiben dem Anhang (§12) vorbehalten. Zwei Punkte sind an dieser Stelle besonders hervorzuheben:

1. Eine wichtige Kategorie quasilinearer Operatoren bilden die Operatoren mit Divergenzstruktur. Diese Operatoren lassen sich schreiben in der Form

$$N(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, u, Du, \ldots, D^m u)$$

mit gewissen Funktionen $A_{\alpha}(.,.,\ldots.)$; $D^j u$ bezeichne den Vektor der $D^{\alpha}u$ mit $|\alpha| = j$. Damit nun $N(.)$ sogar vom variationellen Typ ist, muß es zusätzlich eine Funktion $M(x,\xi)$ geben mit $A_{\alpha}(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} M(x,\xi)$ (vgl. Berger [8], p.77f. , Landes [39] , Ladyzhenskaya u. Ural'tseva [37], p. 318 f.). Diese Klasse ist jedoch, gerade auch im Hinblick auf Anwendungen, besonders wichtig, da quasilineare Operatoren häufig aus der Euler-Lagrange-Gleichung eines Energiefunktionals entstehen (Berger [8], p. 16 f).

2. Während die Forderung, $N(.)$ möge vom variationellen Typ sein, eine Einschränkung bedeutet, sollen andrerseits strenge Nichtlinearitäten zugelassen sein, sodaß die A_{α} keiner Abschätzung $|A_{\alpha}(x,\xi)| \leq |\xi|^p$ zu genügen brauchen. Die Überwindung der dadurch entstehenden Probleme mit Hilfe von Methoden der Variationsrechnung ist das eigentliche Ziel dieser Arbeit. Die Schwierigkeiten beginnen bereits bei der Definition eines 'ausgezeichneten' Operators, denn ohne die Voraussetzung $|A_{\alpha}(x,\xi)| \leq |\xi|^p$ ist es i. a. nicht möglich, dem formalen Ausdruck $N(.)$ implizit eine stetige Abbildung $H_o^{m,p}(G) \rightarrow W^{-m,p}(G)$ zuzuordnen (mit $W^{-m,p}(G) := H_o^{m,p}(G)^*$) ; vgl. hierzu Berger [8], p. 82 f., Berger und Schechter [9], Landes u. Mustonen [42], Lions [45], p.156 .

Aus demselben Grund scheitert hier eine andere naheliegende Methode, nichtlineare Störungen N(.) eines linearen Operators L zu behandeln, die darin besteht, $D(N) \supset D(L)$ zu fordern (Gustafson u. Sather [27], [28], Sather [62], Conjura u. Petryshin [18], Brézis u. Nirenberg [14]). Eine Ausnahme bildet die Arbeit von Leinfelder und Simader [43]; hier wird $D(N) \cap D(L)$ betrachtet mit (nur) in u(x) streng nichtlinearen N . Schließlich gibt es im Falle monotoner Nichtlinearitäten noch die Möglichkeit, nichtlineare Operatoren in Orlicz-Sobolev-Räumen zu definieren (vgl. J. Berger [5], Gossez [25], [26], Mustonen [51] - [53]) . Die meisten Arbeiten über elliptische Probleme verzichten von vornherein auf ein Operatorenkonzept und beschränken sich auf den Nachweis schwacher Lösungen (vgl. z. Bp. Clément [17], Hess [30], Landes [39]-[41], Mustonen [52], Noussair [55], Simader [65], Webb [70],[71]) .

Dagegen soll hier in naheliegender Analogie zum 1. Darstellungssatz (Satz 1.20) ein nichtlinearer Operator T+N auf $D(T+N) \subset H$ mit Werten in H definiert und auf einige Eigenschaften hin untersucht werden. Eine ähnliche Zielsetzung liegt der Arbeit von Conjura u. Petryshin [18] zugrunde wo für monotone Operatoren N(.) mit $D(N) \supset D(L)$ eine Verallgemeinerung der Friedrichsfortsetzung hergeleitet wird; dieses Vorgehen setzt jedoch die Kenntnis eines "minimalen" Operators voraus.

Der konstruktive Kern von Satz 1.20 sieht etwa so aus:

Satz 2.1

Sei B eine symmetrische, halbbeschränkte, dicht definierte und abgeschlossene Bilinearform auf $D(B) \subset H$. Der Operator T sei definiert auf

$$D(T) := \{\, u \in D(B) \,;\, \exists f \in H \text{ mit } B[u,\varphi] = (f,\varphi) \text{ für alle } \varphi \text{ aus einem core von } B \,\}$$

durch $Tu := f$. Dann ist T selbstadjungiert und halbbeschränkt.

Bemerkung: Künftig werden nur Bilinearformen in reellen Räumen betrachtet werden (wie bei der Behandlung nichtlinearer Operatoren allgemein üblich), obwohl es prinzipiell möglich wäre, den komplexen Fall mit denselben Methoden zu behandeln.

Die folgenden Voraussetzungen bilden die Grundlage aller weiteren Betrachtungen:

(H.1) Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen und $H := L^2_{(\text{reell})}(G)$. $B[u,v]$ sei eine symmetrische, halbbeschränkte und abgeschlossene Bilinearform mit core $C_0^\infty(G)$ und $D(B) \subset H_0^{m,2}(G)$.

(H.2) Sei $p \in L^1_{loc}(G)$, $p \geq 0$, und $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $g(t)t \geq 0$ für alle t. Weiter sei $G(t) := \int_0^t g(s)\,ds$.

Def. 2.2

Es seien G, H und B wie in (H.1); für $|\alpha| \leq m$ seien Funktionen p_α, g_α und G_α gegeben, die (H.2) erfüllen. Dann sei

$$D(\tilde{F}) := \{\, u \in D(B) \;;\; p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha u \in L^1(G),\ |\alpha| \leq m \,\},$$

und $\tilde{F} : D(\tilde{F}) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\tilde{F}(u) := B[u] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha u \, dx \,.$$

Für alle $u \in D(\tilde{F})$ ist $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) \in L^1_{loc}(G)$, da

$$|p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)| \leq p_\alpha \cdot \max\{\, |g_\alpha(s)| \;;\; |s| \leq 1 \,\} + p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha u \,.$$

Daher ist folgende Definition sinnvoll:

Def. 2.3

$F : D(\tilde{F}) \times C_0^\infty(G) \to \mathbb{R}$ sei erklärt durch

$$F(u,\varphi) := B[u,\varphi] + \sum_{|\alpha| \le m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha \varphi \, dx .$$

Schließlich benötigt man eine "Stammfunktion" zu F :

Def. 2.4

Sei (H.1) erfüllt und seien für $|\alpha| \le m$ p_α, g_α und G_α gemäß (H.2) gegeben. Dann sei

$$D(S) := \{ u \in D(B) \; ; \; p_\alpha G_\alpha (D^\alpha u) \in L^1(G), \; |\alpha| \le m \} ,$$

und $S : D(S) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$S(u) := \frac{1}{2} B[u] + \sum_{|\alpha| \le m} \int_G p_\alpha G_\alpha (D^\alpha u) \, dx \quad \text{für } u \in D(S).$$

Damit ist man in der Lage, einen zugehörigen Operator T+N zu definieren:

Def. 2.5

$$D(T+N) := \left\{ u \in D(\tilde{F}) \cap D(S) \; ; \; \exists f \in H : F(u,\varphi) = (f,\varphi), \forall \varphi \in C_0^\infty(G) \right\} ,$$

$(T+N)(u) := f$, für $u \in D(T+N)$.

Dabei ist zu beachten, daß im linearen Fall F und S (bis auf den Faktor 1/2) übereinstimmen. Für eine weitergehende Analogie dieser Definition von T+N zu Satz 2.1 wird auf den Anhang (§ 11) verwiesen. In den nun folgenden Abschnitten soll untersucht werden, wann der Operator T+N surjektiv ist, einen in H×H abgeschlossenen Graphen besitzt und inwieweit er als Ableitung des Funktionals S aufgefaßt

werden kann; außerdem wird ein Verzweigungsproblem für T+N behandelt.

Später finden noch folgende Voraussetzungen Verwendung:

(H.3) Für g nach (H.2) gelte $t^{-1}g(t) \to 0$, $t \to 0$. Dann sei $\tilde{g}(t) := t^{-1}g(t)$ für $t \neq 0$ und $\tilde{g}(0) := 0$. Insbesondere ist dann $\tilde{g}$ stetig auf $\mathbb{R}$ und $\tilde{g} \geq 0$.

(H.4) Für g nach (H.3) gelte: Es gibt ein $c \geq 1$ mit $\tilde{g}(t)s^2 \leq c\,(\,g(t)t + g(s)s\,)$, für alle $s,t \in \mathbb{R}$.

(H.5) Sei g wie in (H.2). Zusätzlich gebe es eine stetige Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t)t \geq 0$, $h(t)t$ konvex, $h(-t) = -h(t)$ und $h(t)t \leq g(t)t \leq c'\,h(t)t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(H.6) Für $\tilde{g}$ wie in (H.3) gelte $\tilde{g}(-t) = \tilde{g}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, und $|s| \leq |t| \Longrightarrow \tilde{g}(s) \leq \tilde{g}(t)$, $\forall s,t \in \mathbb{R}$.

Lemma 2.6

g erfülle (H.6). Dann genügt g der Bedingung (H.4).

Beweis

Falls $|s| \geq |t|$, so ist $\tilde{g}(t) \leq \tilde{g}(s)$, mithin $\tilde{g}(t)s^2 \leq \tilde{g}(s)s^2 = g(s)s$. Falls $|s| \leq |t|$, so ist $s^2 \leq t^2$, also $\tilde{g}(t)s^2 \leq g(t)t^2 = g(t)t$. QED

§ 3 Zur Existenz minimierender Funktionen

In diesem Paragraphen werden einige Standardsätze über die schwache untere Halbstetigkeit von Integralfunktionalen (vgl. Berger [8], Morrey [49]) bewiesen und auf S (nach Def. 2.5) angewendet. Als Ergebnis für die gängigen Minimierungsprobleme folgt, daß jede Minimalfolge schwach gegen eine minimierende Lösung konvergiert (nach Teilfolgenauswahl) und S sein Infimum annimmt.

Lemma 3.1

Sei B eine symmetrische, nichtnegative und abgeschlossene Bilinearform. Sei $(u_n) \subset D(B)$ eine Folge mit $B[u_n] \leq$ const. und $u_n \longrightarrow u \in H$.

Dann gilt $u \in D(B)$ und $B[u] \leq \liminf B[u_n]$.

Beweis

Nach Satz 1.10 gibt es ein $u' \in D(B)$ mit $u_{n_j} \longrightarrow u'$ und $B[u'] \leq \liminf B[u_{n_j}]$. Wegen $u_n \longrightarrow u$ gilt aber auch $u_{n_j} \longrightarrow u$, sodaß wegen der Eindeutigkeit des schwachen Limes $u = u'$ folgt. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß $\liminf B[u_{n_j}] = \liminf B[u_n]$ ist, womit sich die Behauptung ergibt. QED

Lemma 3.2 (vgl. Berger [8], p. 303)

Sei B eine symmetrische, halbbeschränkte, dicht definierte und abgeschlossene Bilinearform. Für T nach Satz 1.20 gelte

$\sigma_{ess}(T) \subset [0, \infty)$. Sei $(u_n) \subset D(B)$ mit $B[u_n] \leq$ const. und $u_n \longrightarrow u \in H$.

Dann gilt $u \in D(B)$ und $B[u] \leq \liminf B[u_n]$.

Bemerkungen: 1. Wie üblich sei für selbstadjungiertes T $\sigma_{ess}(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} ; \exists (u_n) \subset D(T): (u_i, u_j) = \delta_{ij}, \|(T-\lambda)u_n\| \to 0\}$. 2. Berger (a.a.O.) beweist eine ähnliche Aussage für ein auf dem ganzen Raum definiertes semilineares Funktional.

Beweis

Die Form B wird zunächst in einen positiven und in einen "kompakten" Anteil zerlegt. Sei $E(\lambda)$ die Spektralschar von T, also $T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda)$ (vgl. Kato [34], p. 353 ff). Nach Voraussetzung ist $\sigma_{ess}(T) \subset [0, \infty)$ und T halbbeschränkt, sodaß für alle $\varepsilon > 0$ $R(E(-\varepsilon))$ endlichdimensional sein muß; dabei bezeichne $R(E(\lambda))$ den Wertebereich des Projektionsoperators $E(\lambda)$.

Beh.: $T_1 := TE(0-)$ ist kompakt und symmetrisch.

Beweis der Behauptung: Sei $(u_n) \subset H$ mit $u_n \longrightarrow 0$.

Dann ist $E(0-)u_n \in D(T)$, also $u_n \in D(T_1)$, und

$$\|T_1 u_n\|^2 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \lambda^2 \, d(E(\lambda)u_n, u_n) + \int_{-\varepsilon}^{0-} \lambda^2 \, d(E(\lambda)u_n, u_n) \leq$$

$$\leq \lambda_0^2 \, (E(-\varepsilon)u_n, u_n) + \varepsilon^2 \|u_n\|^2 \quad (\text{mit } \lambda_0 := \inf \sigma(T)).$$

Nun ist aber $E(-\varepsilon)$ ein endlichdimensionaler Operator, also kompakt; $u_n \longrightarrow 0$ hat daher $E(-\varepsilon)u_n \to 0$ und

$(E(-\varepsilon)u_n,u_n) \to 0$ zur Folge. Zusammen mit $\|u_n\| \leq c$ ergibt sich daher: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0$: $\|T_1 u_n\|^2 \leq \varepsilon + c\cdot\varepsilon^2$, mithin $T_1 u_n \to 0$. Schließlich ist wegen $TE(0-) = E(0-)TE(0-)$ der Operator T_1 auch symmetrisch und die Behauptung bewiesen. -

Die Form $B_0[u,v] := B[u,v] - (T_1 u,v)$ ist auf $D(B_0) := D(B)$ definiert und (nach Satz 1.18) abgeschlossen, da die Form $(T_1 u,v)$ auf H definiert und beschränkt ist. Für $u \in D(T)$ ist nun $B_0[u] = (Tu,u) - (T_1 u,u) = ((T-T_1)u,u) \geq 0$ nach Konstruktion von T_1. Für den Nachweis von $B_0 \geq 0$ genügt es daher zu zeigen, daß $D(T)$ ein core von B_0 ist: Es ist T_1 beschränkt und symmetrisch, also ist $T_0 := T - T_1$ auf $D(T_0) := D(T)$ selbstadjungiert. Damit gilt $B_0[u,v] = (T_0 u,v)$ für alle $u \in D(T_0)$ und alle $v \in D(B_0)$; weiter ist $D(T_0) = D(T) \subset D(B) = D(B_0)$. Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.20 impliziert daher, daß T_0 der selbstadjungierte Operator ist, der die Form B_0 darstellt; insbesondere ist $D(T) = D(T_0)$ ein core von B_0.

Sei nun $(u_n) \subset D(B)$ mit $u_n \longrightarrow u \in H$ und $B[u_n] \leq$ const., also auch $B_0[u_n] \leq$ const. Dann folgt zunächst mit Lemma 3.1, daß $u \in D(B_0)$ ist und $B_0[u] \leq \liminf B_0[u_n]$. Aus $u_n \longrightarrow u$ folgt weiter $T_1 u_n \to T_1 u$ und $(T_1 u_n,u_n) \to (T_1 u,u)$, mithin

$B_0[u] + (T_1u,u) \leq \liminf (B_0[u_n] + (T_1u_n,u_n))$, oder

$B[u] \leq \liminf B[u_n]$. QED

Lemma 3.3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $p \in L^1_{loc}(\Omega)$, $p \geq 0$ und $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $G \geq 0$. Sei (u_n) eine Folge meßbarer Funktionen mit $u_n \xrightarrow[p.p.]{} u$ und $\int_\Omega pG(u_n)\,dx \leq \text{const}$. Dann ist $pG(u) \in L^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega pG(u)\,dx \leq \liminf \int_\Omega pG(u_n)\,dx.$$

Beweis

Da G stetig ist, gilt auch $pG(u_n) \xrightarrow[p.p.]{} pG(u)$. Da alle Integranden nichtnegativ sind, folgt die Behauptung aus dem Lemma von Fatou. QED

Lemma 3.4 (vgl. Simader [65], Lemma 7)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $p \in L^1_{loc}(\Omega)$, $p \geq 0$, und $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und konvex mit $G(0) = 0$ und $G(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $(u_n) \subset H := L^2(\Omega)$, $u_n \to u \in H$ und $\int_\Omega pG(u_n)\,dx \leq C$. Dann gilt $pG(u) \in L^1(\Omega)$ und $\int_\Omega pG(u)\,dx \leq \liminf \int_\Omega pG(u_n)\,dx$.

Bemerkung: Der folgende Beweis ist eine vereinfachte Fassung des von Simader gegebenen Beweises; in Simaders Lemma 7 werden zusätzlich Abschneidungen der u_n berücksichtigt. Lemma 3.4 ist ein Spezialfall von Theorem 1.8.1 in Morrey [49] .

Beweis

a) Nach einem Satz von Mazur (Yosida [73], p. 120, Th. 2)

gibt es Zahlen a_{nj}, $1 \leq j \leq n$, $a_{nj} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{nj} = 1$, derart daß

$$v_n := \sum_{j=1}^{n} a_{nj} u_j \to u.$$

Da G konvex ist, gilt nach der 1. Jensenschen Ungleichung

(vgl. z. Bp. Hewitt u. Stromberg [33], p.202)

$$G(v_n) \leq \sum_{j=1}^{n} a_{nj} G(u_j), \quad \text{also auch}$$

$$\int_\Omega pG(v_n) \, dx \leq \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \int_\Omega pG(u_j) \, dx \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot C = C.$$

Wegen $v_n \to u$ folgt insbesondere auch $v_{n_j} \xrightarrow[p.p.]{} u$, und somit

$pG(v_{n_j}) \xrightarrow[p.p.]{} pG(u)$. Mit dem Lemma von Fatou folgt daher

$pG(u) \in L^1(\Omega)$ und $\int_\Omega pG(u) \, dx \leq C$.

b) Insbesondere kann man in a) die Folge (u_n) durch eine beliebige Teilfolge ersetzen. Nun gibt es aber zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilfolge $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ mit

$$\int_\Omega pG(u_{n_k}) \, dx \leq \liminf \int_\Omega pG(u_n) \, dx + \varepsilon =: C_\varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nach Teil a) folgt daher, daß $\int_\Omega pG(u) \, dx \leq C_\varepsilon$ ist, und dies für jedes $\varepsilon > 0$, woraus die Behauptung folgt. QED

Lemma 3.5

Seien G, H und B wie in (H.1); darüberhinaus sei $B \geq 0$ oder $\sigma_{ess}(T) \subset [0, \infty)$ für T nach Satz 1.20. Für $|\alpha| \leq m$ seien p_α, g_α und G_α gegeben, die (H.2) genügen; für

$|\alpha|=m$ seien die G_α konvex. Sei S wie in Def. 2.4, $(u_n)\subset D(S)$ mit $u_n \longrightarrow u \in H$ und $S(u_n) \leq$ const. Dann gilt:

a) $u \in D(S)$,

b) $S(u) \leq \liminf S(u_n)$,

c) Für alle $f \in H$: $S(u)-(f,u) \leq \liminf \left(S(u_n)-(f,u_n)\right)$.

Beweis

Nach Def. 2.4 ist $S(u_n) = (1/2)B[u_n] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_n)\, dx$,

wobei alle Integranden $p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_n) \underset{p.p.}{\geq} 0$ sind.

Mit $\lambda_o := \inf \sigma(T) = \inf \{ B[v] ;\ v \in D(B),\ \|v\|=1 \}$ gilt daher

$(1/2)\, \lambda_o \|u_n\|^2 \leq (1/2)B[u_n] \leq S(u_n) \leq$ const.

Wegen $\|u_n\| \leq$ const nach Voraussetzung ist folglich

$|B[u_n]| \leq$ const. Somit ist auch für alle $|\alpha| \leq m$

$$\int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_n)\, dx \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_n)\, dx = S(u_n) - \frac{1}{2} B[u_n] \leq \leq \text{const.}$$

Sei nun $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ eine Teilfolge mit

$$\lim S(u_{n_k}) = \liminf S(u_n).$$

Zunächst folgt mit Lemma 3.1 bzw. Lemma 3.2, daß $u \in D(B)$ und $B[u] \leq \liminf B[u_{n_k}]$ gilt. Nach (H.1) erfüllt B die Voraussetzungen von Lemma 1.24, sodaß man aus $\|u_{n_k}\|^2 + |B[u_{n_k}]| \leq$ const schließen kann: Es gibt eine Teilfolge $(u_{n_j}) \subset (u_{n_k})$ und ein $v \in D(B)$ mit

$D^\alpha u_{n_j} \xrightarrow{\text{p.p.}} D^\alpha v$ für $|\alpha|<m$ und $D^\alpha u_{n_j} \longrightarrow D^\alpha v$ für $|\alpha|\leq m$.

Nach Voraussetzung gilt jedoch bereits $u_{n_j} \longrightarrow u$, sodaß aus der Eindeutigkeit des schwachen Limes $v = u$ folgt (und damit auch $D^\alpha u = D^\alpha v$ für $|\alpha|\leq m$, da $u,v \in H_o^{m,2}(G)$).

Also ist gezeigt:

$D^\alpha u_{n_j} \xrightarrow{\text{p.p.}} D^\alpha u$ für $|\alpha|<m$ und $D^\alpha u_{n_j} \longrightarrow D^\alpha u$ für $|\alpha|=m$.

Daher kann man für $|\alpha|<m$ auf die Terme $\int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_{n_j})\,dx$ Lemma 3.3 anwenden mit dem Ergebnis, daß (für $|\alpha|<m$)

$p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u) \in L^1(G)$ und $\int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)dx \leq$

$$\leq \liminf \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_{n_j})\,dx.$$

Für $|\alpha|=m$ weiß man $D^\alpha u_{n_j} \longrightarrow D^\alpha u$, $\int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_{n_j})dx \leq \text{const}$ und G_α konvex. Wegen (H.2) ist aber auch $G_\alpha(0) = 0$ und $G_\alpha \geq 0$ erfüllt, sodaß Lemma 3.4 impliziert: Für $|\alpha|=m$ ist

$$p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u) \in L^1(G) \text{ und } \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\,dx \leq$$

$$\leq \liminf \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_{n_j})\,dx.$$

Insgesamt ist damit $u \in D(S)$ nachgewiesen, d.h. Beh. a), und

$$S(u) \leq \liminf S(u_{n_j}).$$

Da (u_{n_j}) Teilfolge von (u_{n_k}) ist und $\lim S(u_{n_k}) =$ $= \liminf S(u_n)$, folgt: $S(u) \leq \lim S(u_{n_j}) = \lim S(u_{n_k}) =$ $= \liminf S(u_n)$, also Beh. b).

Beh. c) ist eine einfache Folgerung aus b), denn $u_n \longrightarrow u$ impliziert $(f,u_n) \to (f,u)$. QED

§ 4 Eine Variationsmethode für strenge Nichtlinearitäten

Wenn man eine minimierende Funktion u gefunden hat, besteht der übliche Weg der Variationsrechnung darin, $S(u+t\varphi)$ zu betrachten und

$$\left(\frac{d}{dt} S(u+t\varphi)\right)_{|\, t=0} = 0 \tag{1}$$

auszunützen (vgl. Morrey [49], Vainberg [68], [69]). Dies führt im Idealfall zum Nachweis, daß u Lösung der Eulergleichung sein muß. Im Falle starker Nichtlinearitäten stellen sich diesem Vorgehen mehrere Hindernisse entgegen: Zunächst ist es i.a. nicht einmal möglich, $u+t\varphi \in D(S)$ zu zeigen für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Daß dies exponentielle Wachstumsschranken für die Nichtlinearitäten erforderte, macht ein Beispiel von Landes in [39] deutlich. Weiter benötigt man bei der Differentiation (1) eine Majorante für $t^{-1}(S(u+t\varphi) - S(u))$, um den Konvergenzsatz von Lebesgue (für $t \to 0$) anwenden zu können. Um hier problemlos zu argumentieren, müßte man praktisch die lokale Beschränktheit der $D^\alpha u$ zur Verfügung haben; dies ist aber im allgemeinen nicht zu erreichen (vgl. Ladyshenskaja u. Ural'tseva [37], p. 324 ff. und die von Luckhaus [46] angegebenen Beispiele).

Zur Überwindung dieser Schwierigkeiten werden hier die aus der Vorzeichenbedingung $g_\alpha(t)t \geq 0$ resultierenden Eigenschaften der Stammfunktionen G_α ausgenützt. In Lemma 4.2 wird gezeigt, daß für $u \in D(S)$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$ und $0<a,t<1/2$ die Funktion $u + t(\varphi - au) \in D(S)$ ist. Dieser Ansatz hat, grob gesagt, den Vorzug, daß an den Stellen $x \in G$, wo $D^\alpha u(x)$ sehr groß ist, $-aD^\alpha u(x)$ stärker ins Gewicht fällt als $D^\alpha \varphi(x)$. Eine ähnliche Funktion von t kommt bereits in einer Arbeit von Lusternik [47] (1934) vor, wo $u \in \partial K_r := \{ v \in H;\ \|v\| = r \}$ ist und $u + t(\varphi - a(t)u)$ betrachtet wird; dabei ist $a(t)$ mit $t^{-1}a(t) \to 0$, $t \to 0$, so gewählt, daß $u + t(\varphi - a(t)u) \in \partial K_r$ ist (vgl. Vainberg [68], p. 96 f.).

Anschließend wird mit Hilfe des Lemmas von Fatou ein

Regularitätssatz für minimierende Funktionen u (u wie in Satz 3.5) bewiesen, nämlich (Lemma 4.3)

$$p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha u \in L^1(G).$$

Jedoch reicht auch diese Information über u nicht aus, um in (1) mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue zur Grenze übergehen zu können. Daher wird im Beweis zu Lemma 4.4 eine Zerlegung des Integrationsgebietes eingeführt: Ein Anteil konvergiert dann nach Lebesgue und liefert Schranken für den zweiten Anteil, den man dann nach dem Lemma von Fatou behandeln kann. Schließlich läßt sich der Hilfsparameter a wieder leicht eliminieren.

Lemma 4.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $H := L^2(\Omega)$, p, g, und G gemäß (H.2). Sei $u \in H$ mit $pG(u) \in L^1(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt für alle $0 < t < 1$, $0 < a < 1/2$:

$$pG(u + t(\varphi - au)) \in L^1(\Omega).$$

Beweis

Wegen $G'(t)t = g(t)t \geq 0$ und $G(0) = 0$ gilt $G(t) \geq 0$ und

$$(1) \quad \begin{cases} G(s) \leq G(t) \text{ für } s \in [0,t] & \text{falls } t \geq 0, \text{ bzw.} \\ G(s) \leq G(t) \text{ für } s \in [t,0] & \text{falls } t \leq 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Sei $R := \max \{ |\varphi(x)| ; x \in \Omega \}$ und

$\Omega_a := \{ x \in \Omega ; a|u(x)| \leq |\varphi(x)| \}$. Folglich ist

$\Omega_a \subset \operatorname{supp} \varphi \cup \{ x \in \Omega ; u(x) = 0 \}$ (hier bezeichne u einen fest gewählten Repräsentanten der Klasse $u \in H$).

Sei $x \in \Omega_a$, $\varphi(x) \neq 0$. Es gilt $|u(x)| \leq a^{-1}|\varphi(x)| \leq a^{-1}R$,

$|u(x) + t(\varphi(x) - au(x))| \leq a^{-1}R + R + R = R(a^{-1}+2)$.

Da G stetig ist, gibt es ein $C_a>0$ mit $G(s) \leq C_a$ für alle s mit $|s| \leq R(a^{-1}+2)$. Da aus $\varphi(x)=0$ auch $u(x) = 0$ und $G(u(x))= 0$ folgt, kann man auf Ω_a folgendermaßen abschätzen:

$$0 \leq pG(u+t(\varphi-au))\cdot\chi_{\Omega_a} \leq pG(u+t(\varphi-au))\cdot\chi_{\text{supp }\varphi} \leq$$

$$\leq pC_a\cdot\chi_{\text{supp }\varphi} \in L^1(\Omega),$$

denn es ist $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ und $p \in L^1_{loc}(\Omega)$ (wie üblich bezeichne χ_A die charakteristische Funktion der meßbaren Menge $A\subset\Omega$).

Für $x \notin \Omega_a$ hingegen gilt $a|u(x)| > |\varphi(x)|$, sodaß

$\text{sign}(\varphi(x) - au(x)) = -\text{sign } u(x)$ ist und

$|\varphi(x) - au(x)| \leq 2a|u(x)| \leq |u(x)|$ für $0 < a < 1/2$.

Für $0 < t < 1$ gilt daher

$$0 \leq u(x) + t(\varphi(x) - au(x)) \leq u(x), \text{ falls } u(x) \geq 0,$$

$$u(x) \leq u(x) + t(\varphi(x) - au(x)) \leq 0, \text{ falls } u(x) \leq 0 \text{ ist.}$$

Daher folgt mit (1)

$$G(u(x)+t(\varphi(x)-au(x)) \leq G(u(x)) \text{ für } x \notin \Omega_a,$$

oder

$$pG(u+t(\varphi-au))\cdot\chi_{\Omega_a^c} \leq pG(u)\cdot\chi_{\Omega_a^c} \leq pG(u).$$

Zusammen mit der Abschätzung auf Ω_a erhält man

$$0 \leq pG(u+t(\varphi-au)) \leq pC_a\cdot\chi_{\text{supp }\varphi} + pG(u) \in L^1(\Omega).$$

Da G stetig und $u+t(\varphi-au)$ meßbar ist, ist auch $G(u+t(\varphi-au))$ meßbar, womit die Behauptung folgt. QED

Lemma 4.2

Seien G, H und B wie in (H.1) und für $|\alpha| \leq m$ Funktionen p_α, g_α und G_α nach (H.2) gegeben, S wie in Def. 2.4. Sei $u \in D(S)$ und $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Dann gilt für alle $0 < t < 1$ und alle $0 < a < 1/2$:

$$u + t(\varphi - au) \in D(S).$$

Beweis

Da D(B) ein linearer Raum ist mit $C_0^\infty(G) \subset D(B)$, gilt $u + t(\varphi - au) \in D(B)$. Für $|\alpha| \leq m$ erfüllen p_α, g_α, G_α, $D^\alpha u$ und $D^\alpha \varphi$ jeweils die Voraussetzungen von Lemma 4.1 (an p, g, G, u und φ). Daher folgt $p_\alpha G_\alpha (D^\alpha u + tD^\alpha(\varphi - au)) \in L^1(G)$ für $|\alpha| \leq m$, woraus sich die Behauptung ergibt. QED

Lemma 4.3

Seien G, H und B wie in (H.1) und für $|\alpha| \leq m$ Funktionen p_α, g_α und G_α nach (H.2) gegeben, S wie in Def. 2.4, $f \in H$. Die Funktion $u \in D(S)$ habe folgende Minimierungseigenschaft: Für alle $v \in D(S)$ mit $\|v\| \leq \|u\|$ ist

$$S(u) - (f,u) \leq S(v) - (f,v).$$

Dann gilt: $p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u \in L^1(G)$, $|\alpha| \leq m$, und

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u \, dx \leq -B[u] + (f,u).$$

Beweis

Wählt man in Lemma 4.2 speziell $\varphi := 0 \in C_0^\infty(G)$, so folgt, daß mit $u \in D(S)$ auch $(1-h)u \in D(S)$ ist für alle $h \in (0,1/2)$. Da $\|(1-h)u\| \leq \|u\|$ ist für $0 \leq h < 1/2$, folgt nach Voraussetzung

$$S(u) - (f,u) \leq S((1-h)u) - (1-h)(f,u),$$

oder

$$\frac{1}{2} B[u] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\, dx - (f,u) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} B[u] - h \cdot B[u] + \frac{1}{2} h^2 B[u] - (f,u) + h\,(f,u) +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha((1-h)D^\alpha u)\, dx, \text{ d.h.}$$

$$(1) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha \big(G_\alpha(D^\alpha u) - G_\alpha((1-h)D^\alpha u) \big)\, dx \leq \\ \leq \left(\frac{1}{2} h^2 - h \right) B[u] + h\,(f,u) \leq h \cdot C \text{ für alle } h \in (0, \tfrac{1}{2}), \\ \text{mit } C := |B[u]| + |(f,u)|. \end{cases}$$

Wegen $G_\alpha'(t)t = g_\alpha(t)t \geq 0$ ist $G_\alpha|_{[0,\infty)}$ monoton nicht-fallend, $G_\alpha|_{(-\infty,0]}$ monoton nicht-zunehmend (vgl. (1) im Beweis von Lemma 4.1). Daher ist $G_\alpha(D^\alpha u) - G_\alpha((1-h)D^\alpha u) \underset{\text{p.p.}}{\geq} 0$ für alle $|\alpha| \leq m$, sodaß alle Integranden auf der linken Seite von (1) nichtnegativ sind. Daher gilt für jedes einzelne α mit $|\alpha| \leq m$ und für alle $0 < h < \frac{1}{2}$:

$$h^{-1} \int_G p_\alpha \big(G_\alpha(D^\alpha u) - G_\alpha((1-h)D^\alpha u) \big)\, dx \leq C.$$

Mit $u_\alpha := D^\alpha u$ kann man dies schreiben als

$$(2) \qquad \int_G p_\alpha h^{-1} \big(G_\alpha(u_\alpha) - G_\alpha((1-h)u_\alpha) \big)\, dx \leq C, \quad \forall\, h \in (0, \tfrac{1}{2}).$$

Sei nun ein α mit $|\alpha| \leq m$ festgehalten. Für fast alle $x \in G$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\tau_{x,h} \in [0,h]$ mit

$$(3) \qquad h^{-1}\big(G_\alpha(u_\alpha) - G_\alpha((1-h)u_\alpha)\big) = g_\alpha((1-\tau_{\cdot,h})u_\alpha)u_\alpha \text{ p.p.}$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite meßbar und nichtnegativ, also gilt dasselbe auch für die rechte Seite. Wegen $0 \leq \tau_{x,h} \leq h$ konvergiert die rechte Seite von (3) mit $h \to 0$ fast überall gegen $g_\alpha(u_\alpha)u_\alpha$. Weiterhin gilt wegen (2) und (3) für alle $h \in (0,\frac{1}{2})$

$$\int_G p_\alpha g_\alpha((1-\tau_{\cdot,h})u_\alpha)u_\alpha \, dx \leq C.$$

Also sind die Voraussetzungen des Lemmas von Fatou erfüllt, mit der Konsequenz, daß $p_\alpha g_\alpha(u_\alpha)u_\alpha \in L^1(G)$ ist und

$$\int_G p_\alpha g_\alpha(u_\alpha)u_\alpha \, dx \leq \liminf_{h\to 0+} h^{-1} \int_G p_\alpha\big(G_\alpha(u_\alpha) - G_\alpha((1-h)u_\alpha)\big)dx.$$

Folglich ist für $|\alpha| \leq m$ $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha u \in L^1(G)$ und es gilt die Abschätzung

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha u \, dx \leq$$

$$\leq \liminf_{h\to 0+} h^{-1} \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha\big(G_\alpha(D^\alpha u) - G_\alpha((1-h)D^\alpha u)\big) \, dx \leq \tag{1}$$

$$\leq \liminf_{h\to 0+} \left(\frac{h}{2} - 1\right) B[u] + \liminf_{h\to 0+} (f,u) = -B[u] + (f,u).$$

QED

Lemma 4.4

Seien G, H und B wie in (H.1) und für $|\alpha| \leq m$ Funktionen p_α, g_α und G_α nach (H.2) gegeben, $\widetilde{F}$, F und S gemäß den Definitionen 2.2, 2.3 und 2.4. Sei $u \in D(\widetilde{F}) \cap D(S)$, $f \in H$ und

$\varphi \in C_0^\infty(G)$. Zu jedem $a \in (0,\frac{1}{2})$ gebe es eine Zahl $\eta(a) \in (0,1)$ derart, daß für alle $t \in (0, \eta(a))$ gelte:

$$S(u) - (f,u) \leq S(u+t(\pm\varphi-au)) - (f,u+t(\pm\varphi-au)).$$

Dann ist $F(u,\varphi) - (f,\varphi) = 0$.

Bemerkungen:

1. Nach Lemma 4.2 ist $u+t(\varphi-au) \in D(S)$ falls $0<t<1$ und $0<a<\frac{1}{2}$.
2. "$\pm\varphi$" soll bedeuten, daß die Ungleichung sowohl für φ als auch für $-\varphi$ gilt.
3. Es ist $F(u,\varphi)-(f,\varphi)=0$ die "Eulergleichung" zum Minimierungsproblem $S(u)-(f,u)=\min$. Der nun folgende Beweis ist der oben angekündigte Ersatz für $(\frac{d}{dt} S(u+t\varphi))|_{t=0} = (f,\varphi)$ und beruht auf einer Verfeinerung des Beweises von Lemma 4.3.

Beweis

Sei zunächst $a \in (0,\frac{1}{2})$ fest gewählt und $\eta := \eta(a)$. Dann gilt nach Voraussetzung für alle $t \in (0,\eta)$

$$S(u) - (f,u) \leq S(u+t(\pm\varphi-au)) - (f,u+t(\pm\varphi-au)).$$

Nach der Definition von S lautet dies ausgeschrieben:

$$\frac{1}{2} B[u] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\, dx - (f,u) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} B[u] + t\, B[u,\pm\varphi-au] + \frac{1}{2} t^2 B[\pm\varphi - au] +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u+tD^\alpha(\pm\varphi-au))\, dx - (f,u) - t(f,\pm\varphi-au),$$

also:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\, dx \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u+tD^\alpha(\pm\varphi-au))\, dx +$$

$$+ t\, B[u,\pm\varphi-au] - t(f,\pm\varphi-au) + \frac{1}{2} t^2 B[\pm\varphi - au].$$

Mit der Abkürzung $H_\alpha(t) := G_\alpha(D^\alpha u + tD^\alpha(\pm\varphi - au))$ für $0 \leq t < \eta$ (sodaß $H_\alpha(0) = G_\alpha(D^\alpha u)$ ist) folgt daher

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha H_\alpha(0)\,dx \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha H_\alpha(t)\,dx + t\,B[u,\pm\varphi - au] - t\,(f,\pm\varphi - au) + \frac{1}{2}t^2\,B[\pm\varphi - au],$$

mithin

$$(1)\qquad \sum_{|\alpha|\leq m} t^{-1} \int_G p_\alpha \left(H_\alpha(0) - H_\alpha(t)\right) dx \leq B[u,\pm\varphi] - (f,\pm\varphi) + \frac{1}{2}t\,B[\pm\varphi - au] - aB[u] + a(f,u).$$

Sei nun $G_{1\alpha} := \{\, x \in G;\ a|D^\alpha u(x)| \leq |D^\alpha \varphi(x)| \,\}$ und $G_{2\alpha} := G_{1\alpha}^c$; dabei sei u ein fest gewählter Repräsentant.

Aus (1) folgt nun

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{G_{2\alpha}} p_\alpha t^{-1} \left(H_\alpha(0) - H_\alpha(t)\right) dx \leq$$

$$(2)\qquad \leq B[u,\pm\varphi] - (f,\pm\varphi) + \frac{1}{2}t\,B[\pm\varphi - au] - aB[u] + a(f,u) - \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{G_{1\alpha}} p_\alpha t^{-1} \left(H_\alpha(0) - H_\alpha(t)\right) dx.$$

Die rechte Seite wird mit $t \to 0+$ nach Lebesgue konvergieren, die linke nach Fatou. Dazu soll als Nächstes gezeigt werden, daß die Integranden auf der linken Seite nichtnegativ sind.

Für $x \in G_{2\alpha}$ ist nämlich nach Definition von $G_{2\alpha}$

$$|D^\alpha \varphi(x)| < a|D^\alpha u(x)|, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{sign}(\pm D^\alpha \varphi(x) - aD^\alpha u(x)) = -\operatorname{sign} D^\alpha u(x), \text{ und}$$

$|\pm D^\alpha \varphi(x) - aD^\alpha u(x)| < 2a|D^\alpha u(x)| < |D^\alpha u(x)|$, da $0 < a < \frac{1}{2}$.

Also gilt (mit $u_\alpha := D^\alpha u$ und $\varphi_\alpha := D^\alpha \varphi$)

$$0 \leq u_\alpha(x) + t\,(\pm\varphi_\alpha(x) - a u_\alpha(x)) \leq u_\alpha(x), \text{ falls } u_\alpha(x) > 0,$$

$$(3)\quad u_\alpha(x) \leq u_\alpha(x) + t\,(\pm\varphi_\alpha(x) - a u_\alpha(x)) \leq 0, \text{ falls } u_\alpha(x) < 0,$$

für $0 \leq t \leq \eta < 1$.

Da $G_\alpha|[0, \infty)$ monoton nicht-fallend und $G_\alpha|(-\infty, 0]$ monoton nicht-wachsend ist, folgt aus (3)

$$0 \leq G_\alpha\big(u_\alpha(x) + t(\pm\varphi_\alpha(x) - a u_\alpha(x))\big) \leq G_\alpha(u_\alpha(x)),$$

falls $u_\alpha(x) > 0$,

$$(4)\quad G_\alpha(u_\alpha(x)) \geq G_\alpha\big(u_\alpha(x) + t(\pm\varphi_\alpha(x) - a u_\alpha(x))\big) \geq 0,$$

falls $u_\alpha(x) < 0$,

für $0 \leq t \leq \eta < 1$.

Damit ist gezeigt:

$$(5)\qquad \big(H_\alpha(0) - H_\alpha(t)\big)\cdot\chi_{G_{2\alpha}} \geq 0 \quad \text{(p.p.)}.$$

Zu fast allen $x \in G$ gibt es nach dem Mittelwertsatz eine Zahl $\tau_{x,t,\alpha} = \tau_\pm(x,t,\alpha) \in [0,t]$ mit

$$(6)\quad t^{-1}\big(H_\alpha(0) - H_\alpha(t)\big) = -\,g_\alpha(\,u_\alpha + \tau_{\cdot,t,\alpha}\cdot(\pm\varphi_\alpha - a u_\alpha))\cdot$$

$$\cdot(\pm\varphi_\alpha - a u_\alpha) \quad \text{p.p.}$$

Da die linke Seite von (6) meßbar ist, gilt dies auch für die rechte Seite. Mit $t \to 0$ konvergieren die $\tau_{x,t,\alpha}$ auf G gleichmäßig gegen 0. Daher ergibt sich aus (6)

(7) $t^{-1}\big(H_\alpha(0)-H_\alpha(t)\big) \xrightarrow[\text{p.p.}]{} -g_\alpha(D^\alpha u)(\pm D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)$, $t \to 0$.

Um auf die linke Seite von (2) das Lemma von Fatou anwenden zu können, wird nun zuerst gezeigt, daß die rechte Seite von (2) für $t \to 0$ beschränkt bleibt. Dabei sind jedoch nur die Terme $\int_{G_{1\alpha}} p_\alpha \ldots\ldots dx$ zu untersuchen, da

$$\lim_{t\to 0} t\cdot B[\,\pm\varphi - au\,] = 0 \text{ ist.}$$

Nach Definition ist $G_{1\alpha} \subset \operatorname{supp}\varphi \cup \{\, x \in G \;;\; D^\alpha u(x)=0 \,\}$.

Sei also $x \in G_{1\alpha}$. Falls $x \notin \operatorname{supp}\varphi$, dann ist notwendigerweise $D^\alpha u(x) = 0$, also auch $G_\alpha(D^\alpha u(x)) = g_\alpha(D^\alpha u(x)) = 0$.

Sei nun $x \in \operatorname{supp}\varphi$ und $R := \max\{\, |D^\alpha\varphi(x)| \;;\; x \in \operatorname{supp}\varphi,\ |\alpha| \le m \,\}$.

Dann gilt für alle $\tau \in [0,1]$

(8) $\quad |D^\alpha u(x) + \tau(\pm D^\alpha\varphi(x) - aD^\alpha u(x))| \le a^{-1}R + 2R.$

Wegen (6) gilt auf $G_{1\alpha}$

$$\begin{aligned} &|t^{-1}\big(H_\alpha(0) - H_\alpha(t)\big)|_{\text{p.p.}} \\ &\quad = |-g_\alpha\big(D^\alpha u + \tau_{\cdot,t,\alpha}(\pm D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)\big)\cdot(\pm D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)\cdot\chi_{\operatorname{supp}\varphi}| \le \\ &\quad \overset{(8)}{\le} \max\{\, |g_\alpha(s)| \;;\; |s| \le a^{-1}R + 2R \,\}\cdot 2R\cdot\chi_{\operatorname{supp}\varphi} = \\ &\quad = C\,\chi_{\operatorname{supp}\varphi}, \text{ mithin} \end{aligned}$$

(9) $\quad p_\alpha t^{-1}\big(H_\alpha(0) - H_\alpha(t)\big)\cdot\chi_{G_{1\alpha}} \le p_\alpha C\,\chi_{\operatorname{supp}\varphi} \in L^1(G).$

Da man aus (7) punktweise Konvergenz (p.p. in G) gegen $-g_\alpha(D^\alpha u)(\pm D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)$ weiß, folgt mit dem Konvergenzsatz

von Lebesgue (L^1-Majorante ist nach (9) $p_\alpha^C \chi_{\text{supp } \varphi}$):

$$\lim_{t\to 0} \int_{G_{1\alpha}} p_\alpha t^{-1}\big(H_\alpha(0) - H_\alpha(t)\big)\, dx = \tag{10}$$

$$= - \int_{G_{1\alpha}} p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)(\pm D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)\, dx.$$

Also konvergiert die rechte Seite von (2) und ist insbesondere beschränkt für $t \to 0$. Daher kann man auf die linke Seite von (2) das Lemma von Fatou anwenden, denn nach (5) sind die Integranden nichtnegativ und nach (7) liegt p.p.-Konvergenz vor. Folglich gilt in (2)

$$\int \lim (\text{ linke Seite }) \leq \liminf \int \text{rechte Seite},$$

d.h.:

$$- \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{G_{2\alpha}} p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)(\pm D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)\, dx \leq$$

$$\leq B[u,\pm\varphi] - (f,\pm\varphi) - aB[u] + a(f,u) + \tag{11}$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{G_{1\alpha}} p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)(\pm D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)\, dx,$$

mithin:

$$0 \leq B[u,\pm\varphi] - (f,\pm\varphi) - aB[u] + a(f,u) + \tag{12}$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{G} p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)(\pm D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)\, dx.$$

Nach Voraussetzung ist $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha u \in L^1(G)$ für $|\alpha|\leq m$, also $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) \in L^1_{loc}(G)$ und $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha\varphi \in L^1(G)$. Daher ist

$$\int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)(\pm D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)\, dx =$$

$$= \pm \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha\varphi\, dx - a \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha u\, dx.$$

Mit (12) und den Definitionen von F und $\tilde{F}$ folgt daher

$$0 \leq \pm\big(F(u,\varphi) - (f,\varphi) \big) - a\big(\tilde{F}(u) - (f,u) \big),$$

oder

$$\mp\big(F(u,\varphi) - (f,\varphi) \big) \leq -a \big(\tilde{F}(u) - (f,u) \big),$$

also

$$(13) \qquad | F(u,\varphi) - (f,\varphi) | \leq -a \big(\tilde{F}(u) - (f,u) \big).$$

Diese Ungleichung wurde für ein festes, aber beliebiges $a \in (0,\frac{1}{2})$ hergeleitet. Da $\tilde{F}(u)-(f,u)$ nicht von a abhängt, kann man in (13) $a>0$ beliebig nahe bei 0 wählen und erhält

$$F(u,\varphi) - (f,\varphi) = 0,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. QED

Bemerkung 4.5

Aus Formel (13) folgt auch, daß

$$\tilde{F}(u) - (f,u) \leq 0$$

gilt; man vergleiche mit der Behauptung von Lemma 4.3.

§5 Ein Dirichletsches Randwertproblem mit strengen Nichtlinearitäten

Die in den Paragraphen 3 und 4 beschriebene Variationsmethode soll nun verwendet werden, um zu zeigen, daß es zu jedem $f \in H$ ein $u \in D(\tilde{F})$ gibt mit

$$F(u,\varphi) = (f,\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Die Behandlung strenger Nichtlinearitäten im Rahmen der Sobolevräume (statt in Orlicz-Sobolev-Räumen) begann 1971 mit einer Arbeit von Browder [16]. Hauptbezugspunkt der vorliegenden Betrachtungen ist ein Artikel von Simader [65], der im wesentlichen die bis 1976 gewonnenen Resultate umfaßt und auch die Entwicklung zwischen 1971 und 1976 diskutiert. Daher lohnt es nicht, an dieser Stelle auf die vor Simaders Arbeit erschienene Literatur näher einzugehen. Simader verwendet (ähnlich wie in der vorangegangenen Arbeit von Leinfelder und Simader [43]) eine Abschneide- und Approximationstechnik; für die 'abgeschnittenen' Nichtlinearitäten beweist er mit dem Schauderschen Fixpunktsatz die Existenz einer Lösung. Daher kann er allgemeine quasilineare elliptische Operatoren behandeln, ohne eine variationelle Struktur des Problems voraussetzen zu müssen. An die g_α-Nichtlinearitäten stellt er neben der Vorzeichenbedingung $g_\alpha(t)t \geq 0$ die folgenden Voraussetzungen:

(S1) Für $|\alpha|=m$ sei g_α monoton und $g_\alpha(t)t$ konvex.

(S2) Falls $m>1$ ist, gebe es ein $C>0$ mit

$$g_\alpha(t)s \leq g_\alpha(t)t + Cg_\alpha(s)s, \forall t,s \in \mathbb{R} \text{ und } |\alpha|<m.$$

Allerdings wird (S2) nur benötigt, wenn das Problem tatsächlich nichtlinear von $D^\alpha u$, $|\alpha|=m$, abhängt.

Simaders Resultat, das insbesondere wegen des weitgehenden Verzichts auf Monotonieeigenschaften bemerkenswert ist, wurde in den letzten Jahren in verschiedenen Richtungen ausgeweitet; es gab jedoch wenig Fortschritt

bei der Voraussetzung (S2). So greifen einige Autoren auf (S2) oder Varianten davon zurück (Landes [40], [41], Mustonen [54], Webb [70]), während Landes in [39] die Konvexität <u>aller</u> $G_\alpha := \int_0 g_\alpha(.)$ voraussetzt, d.h. die Monotonie aller g_α. Ein Teil der Literatur ist weiterhin dem Studium monotoner oder pseudo-monotoner Operatoren gewidmet (Brézis und Browder [12], Landes und Mustonen [42], Mustonen [51-53]) oder "abstrakten" Methoden, etwa dem Problem $R(A+B) = R(A) + R(B)$ (Brézis [11], Brézis und Nirenberg [14]; $R(A)$ bezeichne den Wertebereich des Operators A). Diesen Arbeiten liegt meist die Zielrichtung zugrunde, die Voraussetzungen an den quasilinearen Hauptteil abzuschwächen (vgl. z. Bp. Landes und Mustonen [42] zur Koerzitivitätsbedingung). Schließlich bietet sich im semilinearen Fall die Verwendung von Maximum-Prinzipien und die Methode der Ober- und Unterlösungen an (vgl. Amann und Crandall [2]).

Eine Ausnahme bildet hier die Arbeit von Webb [71], der für $m>1$ den Fall eines auf $H_o^{m,p}(G)$ definierten nichtlinearen Hauptteils, verbunden mit einer strengen Nichtlinearität vom Typ $p_o g_o(u)$, behandelt, wobei an g_o nur die Vorzeichenbedingung gestellt wird. Webb verwendet einen Satz von Hedberg [29], der es, ähnlich wie für $m=1$, gestattet, Funktionen aus $W^{m,p}$ durch beschränkte Funktionen zu approximieren (in der $W^{m,p}$-Norm); vgl. Lemma 9.17.

Der charakteristische Aspekt des hier vorgestellten Surjektivitätssatzes ist wohl der, daß zum erstenmal strenge Nichtlinearitäten g_α bis zur Ordnung m vorkommen, die für $|\alpha|<m$ nur die Vorzeichenbedingung erfüllen (und für $|\alpha|=m$ $G_\alpha(t) := \int_0^t g_\alpha(s)\,ds$ konvex), wobei m beliebig ist. Da aus g_α monoton bereits G_α konvex folgt, stellt auch die Bedingung für $|\alpha|=m$ eine Abschwächung von (S1) dar. Darüberhinaus scheint der Beweis vergleichsweise elementar und kurz zu sein. Hinweise auf die Behandlung komplizierterer Nichtlinearitäten bleiben dem Anhang (§12) vorbehalten.

Satz 5.1

Es seien G, H und B wie in (H.1) und zusätzlich $B \geq C > 0$ mit einer Konstanten C. Für $|\alpha| \leq m$ seien p_α, g_α und G_α gemäß (H.2) gegeben; für $|\alpha| = m$ seien die G_α konvex. Seien $\tilde{F}$, F, T+N und S gemäß den Definitionen 2.2 - 2.5 erklärt. Dann gibt es zu jedem $f \in H$ ein $u \in D(T+N)$ mit $S(u) - (f,u) \leq S(v) - (f,v)$ für alle $v \in D(S)$ und $F(u,\varphi) = (f,\varphi)$, für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$, d.h. $(T+N)(u) = f$.

Beweis

1.) Zunächst ist $\inf \{ S(u)-(f,u) ; u \in D(S) \} > -\infty$, denn für $u \in D(S)$ gilt

$$S(u)-(f,u) = \frac{1}{2} B[u] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\, dx - (f,u) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} B[u] - (f,u) \geq \frac{1}{2} C\|u\|^2 - \|f\| \cdot \|u\| \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2C} \|f\|^2.$$

Sei nun $(u_n) \subset D(S)$ eine Minimalfolge, d.h. es gelte

$$S(u_n) - (f,u_n) \to \inf \{ S(v) - (f,v) ; v \in D(S) \}.$$

Die Existenz einer solchen Folge ist nach dem Obigen klar. Wegen $S(u_n) - (f,u_n) \geq \frac{1}{2} C\|u_n\|^2 - \|f\| \cdot \|u_n\|$ muß $\|u_n\| \leq$ const sein (denn die rechte Seite dieser Ungleichung geht gegen $+\infty$ mit $\|u_n\| \to +\infty$). Folglich ist auch die Folge $((f,u_n))$ beschränkt, und da $S(u_n) - (f,u_n)$ gegen eine reelle Zahl

konvergiert, müssen auch die Zahlen $S(u_n)$ eine beschränkte Folge bilden.

Es gibt eine Teilfolge $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ und ein $u \in H$ mit $u_{n_j} \longrightarrow u$. Da $|S(u_{n_j})| \leq \text{const.}$ gilt, kann man Lemma 3.5 (in der Fassung für $B \geq 0$) anwenden; es folgt

$u \in D(S)$ und

$$S(u) - (f,u) \leq \liminf \left(S(u_{n_j}) - (f,u_{n_j}) \right) =$$

$$= \inf \{ S(v) - (f,v) \; ; \; v \in D(S) \}.$$

Also hat man in u eine minimierende Funktion gefunden, d.h. es gilt

(1) $\quad S(u) - (f,u) \leq S(v) - (f,v)$ für alle $v \in D(S)$.

2.) Nach Lemma 4.2 gilt für alle $\varphi \in C_o^\infty(G)$, alle $a \in (0,\frac{1}{2})$, $t \in (0,1)$, daß $u + t(\varphi - au) \in D(S)$ ist. Daher kann man in (1) für v speziell $u+t(\varphi-au)$ einsetzen und erhält:

$\forall \varphi \in C_o^\infty(G), \forall a \in (0,\frac{1}{2}), \forall t \in (0,1)$:

$$S(u) - (f,u) \leq S(u+t(\varphi-au)) - (f,u+t(\varphi-au)).$$

Weiter folgt aus (1) nach Lemma 4.3:

$$p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u \in L^1(G), \; |\alpha| \leq m, \text{ d.h. } u \in D(\tilde{F}).$$

Daher sind die Voraussetzungen von Lemma 4.4 für alle $\varphi \in C_o^\infty(G)$ erfüllt, sodaß

$$F(u,\varphi) = (f,\varphi) \text{ für alle } \varphi \in C_o^\infty(G)$$

folgt. QED

§6 Ein Existenzsatz zur Eigenwertgleichung $(T+N)(u) = \lambda u$.

Die gängigen Methoden, nichtlineare Eigenwertprobleme zu behandeln, sind unter den in §2 eingeführten Voraussetzungen nicht direkt anwendbar. Dies liegt im Falle der Liusternik-Schnirelman-Theorie (vgl. Rabinowitz [57-59], Schmidt [64], Zeidler [74]) unter anderem daran, daß man das Funktional S nicht als stetiges und differenzierbares Funktional auf einem Banachraum erklären kann. Gleichwohl gibt es vereinzelte Resultate, wo nichtlineare Eigenwertprobleme ohne Wachstumsbeschränkungen mit Minimax-Prinzipien bearbeitet wurden. In diesem Zusammenhang sind die Arbeiten von Böhme [10] und Westreich [72] zu nennen, die ein Verzweigungsproblem auf ein endlichdimensionales Variationsproblem zurückführen, ähnlich wie bei der Liapunov-Schmidt-Methode (vgl. z. Bp. Sather [62]). Dies macht jedoch starke Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Bestandteile des Operators nötig; Westreich [72] betrachtet überdies nur den Fall beschränkten Grundgebiets und einer Nichtlinearität, die lediglich von x und u(x) abhängen darf. Dies gilt auch für Mustonen [55], wo sehr spezielle kompakte Einbettungen von Sobolevräumen hoher Ordnung in Orlicz-Räume ausgenützt werden.

Auch die Leray-Schauder-Theorie läßt strenge Nichtlinearitäten nicht zu, da man mit ihr nur kompakte Störungen des linearen Operators behandeln kann (vgl. als neuere Referenz: Laloux und Mawhin [38]); außerdem muß die Vielfachheit des Eigenwerts des linearen Operators ungerade sein. Einen Überblick über die wichtigsten Methoden der Verzweigungstheorie findet man z. Bp. bei Berger [7],[8], Krasnoselski [36], Rabinowitz [56].

In diesem und dem folgenden Paragraphen soll nun das Problem der Verzweigung am tiefsten Eigenwert des linearen Operators behandelt werden. Dazu wird zunächst mit Hilfe von Lemma 4.4 gezeigt, daß jedes $u \in D(S)$ mit der Eigen-

schaft $S(u) = \inf \{ S(v) ; v \in D(S), \|v\| \leq \|u\| \}$ einer Eigenwertgleichung

$$F(u,\varphi) = \lambda_u(u,\varphi), \forall \varphi \in C_o^\infty(G),$$

genügt.

In §7 wird anschließend nachgewiesen, daß die Zahlen λ_u mit $\|u\| \to 0$ gegen λ_o, den tiefsten Eigenwert des zu B gehörigen Operators T, konvergieren. Das bedeutet aber gerade, daß λ_o ein Verzweigungspunkt des in §2 definierten Operators T+N ist. Solche Verzweigunsaussagen für unbeschränkte Gebiete, die sich also auch auf Schrödingeroperatoren anwenden lassen, scheinen rar zu sein (vgl. jedoch Böhme [10], Gustafson und Sather [27], Sather [62]; Berger [8], p.383 f., behandelt ein Eigenwertproblem für eine nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung).

Beim Dirichletproblem ist es klar, daß die Lösung u von der Nullfunktion verschieden ist, falls dies auch für die Vorgabe f gilt, da $(T+N)(0) = 0$ ist. Dagegen muß man bei Eigenwertproblemen durch zusätzliche Argumente sicherstellen, daß die Lösung des Variationsproblems nicht durch die 0-Funktion gegeben sein kann. Dieser Punkt soll nun zunächst behandelt werden. Dabei nützt man im wesentlichen aus, daß der selbstadjungierte und halbbeschränkte Operator T mindestens einen Eigenwert unterhalb des wesentlichen Spektrums besitzen soll und die Funktionen g_α bei 0 von höherer als 1. Ordnung verschwinden, d.h. $g_\alpha(t)t^{-1} \to 0$ gilt für $t \to 0$ (vgl. (H.3)).

Hinreichende Bedingungen, unter denen diese Eigenschaften von T (auch für unbeschränktes G) gewährleistet sind, finden sich zum Beispiel in Reed und Simon [61], Schechter [63] und Simon [66]. Falls G beschränkt ist, so folgt aus $D(B) \subset H_o^{m,2}(G)$ mit Hilfe des Rellichschen Auswahlsatzes, daß die Resolvente von T kompakt ist (dabei muß man als Zwischenschritt allerdings erst $|T|^{1/2}$ betrachten). Das Spektrum eines kompakten Operators darf sich aber höchstens bei 0 häufen, sodaß man für T selbst folgern kann, daß $\sigma_{ess}(T) = \emptyset$ sein muß.

Bezeichnungen 6.1

Seien G,H und B wie in (H.1) und T der zu B gehörige selbstadjungierte und halbbeschränkte Operator. Sei S gemäß Def. 2.4. Dann sei

a) $\lambda_o := \inf \{ B[u] ; u \in D(B), \|u\|=1 \}$. Nach Lemma 1.21 gilt daher auch $\lambda_o = \min \sigma(T)$.

b) Für $r \geq 0$ sei $m(r) := \inf \{ S(u) ; u \in D(S), \|u\| \leq r \}$.

Lemma 6.2

Seien G, H und B wie in (H.1) und p_α, g_α und G_α gemäß (H.2) für $|\alpha| \leq m$ gegeben, S nach Def. 2.4. Für $|\alpha|=m$ seien die G_α konvex. Schließlich gelte $\sigma_{ess}(T) \subset [0,\infty)$, wobei T nach Satz 1.20 zu B gehört. Dann gibt es zu jedem $r > 0$ ein $u_r \in D(S)$ mit $\|u_r\| \leq r$ und $S(u_r) = m(r)$, d.h.

$$S(u_r) \leq S(v) \text{ für alle } v \in D(S) \text{ mit } \|v\| \leq r.$$

Beweis

Wegen $S(u) = \frac{1}{2} B[u] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\, dx \geq \frac{1}{2} \lambda_o \|u\|^2$,

für alle $u \in D(S)$, ist $m(r) > -\infty$ (für alle $r>0$).

Sei $(u_n) \subset D(S)$ eine Minimalfolge zum Minimierungsproblem bezüglich $D(S) \cap \{\|v\| \leq r\}$, d.h. $\|u_n\| \leq r$ und $S(u_n) \to m(r)$.

Es gibt eine Teilfolge $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ und ein $u_r \in H$ mit $u_{n_j} \longrightarrow u_r$. Nach Lemma 3.5 (in der Version $\sigma_{ess}(T) \subset [0,\infty)$) gilt dann $u_r \in D(S)$ und $S(u_r) \leq \liminf S(u_{n_j}) = m(r)$. QED

Lemma 6.3

Es seien die Voraussetzungen von Lemma 6.2 erfüllt; zusätzlich sei $\lambda_o < 0$. Für alle $|\alpha| \leq m$ sei die Bedingung (H.3) erfüllt (vgl. §2). Weiter sei für $r>0$ $u_r \in D(S)$ mit $\|u_r\| \leq r$ und $S(u_r) = m(r)$ (vgl. Lemma 6.2). Dann gilt:

a) Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ mit

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha (D^\alpha u_r)\, dx \leq \varepsilon \cdot \|u_r\|^2, \text{ falls } 0<r<\delta.$$

b) Für alle $r>0$ ist $m(r) < 0$. Für jedes $u_r \in D(S)$ mit $S(u_r) = m(r)$ gilt daher $\|u_r\| > 0$.

c) Sei $(r_i) \subset \mathbb{R}^+$ eine Folge mit $r_i \to 0$ und $(u_{r_i}) \subset D(S)$ eine Folge mit $S(u_{r_i}) = m(r_i)$, $\|u_{r_i}\| \leq r_i$.
Dann gibt es ein $u_o \in D(B)$, $\|u_o\|=1$, $B[u_o] = \lambda_o$, derart, daß für eine Teilfolge $(u_{r_k}) \subset (u_{r_i})$ gilt:

$$\|u_{r_k}\|^{-1} u_{r_k} \to u_o \quad \text{und} \quad \|u_{r_k}\|^{-1} u_{r_k} \xrightarrow[B]{} u_o.$$

Bemerkung: Nach b) ist stets $\|u_r\| \neq 0$, sodaß man in c) $\|u_{r_k}\|^{-1}$ bilden darf. "$v_j \xrightarrow[B]{} v$" ist definiert durch $(B+c)[v_j - v] \to 0$, wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, daß $B+c \geq 1$ gilt (vgl. Satz 1.8).

Beweis

Da $C_o^\infty(G)$ ein core von B ist, gibt es eine Folge $(\varphi_n) \subset C_o^\infty(G)$ mit $\|\varphi_n\|=1$ und $\lambda_o \leq B[\varphi_n] \leq \lambda_o + n^{-1}$.

Daher gilt für alle $r' \geq 0$

(1) $\qquad r'^2\lambda_o \leq B[r'\varphi_n] \leq r'^2(\lambda_o + n^{-1})$.

Es ist klar, daß $r'\varphi_n \in D(S)$ ist für alle $r' \geq 0$, alle $n \in \mathbb{N}$.

Wegen der minimierenden Eigenschaften von u_r folgt daher

für $0 \leq r' \leq r$: $S(r'\varphi_n) \geq S(u_r)$, d.h.

$$\frac{1}{2} B[r'\varphi_n] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(r' D^\alpha \varphi_n)\, dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} B[u_r] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_r)\, dx,$$

oder, mit (1) und $B[u_r] \geq \lambda_o \|u_r\|^2$:

$$\frac{1}{2} r'^2(\lambda_o + n^{-1}) + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(r' D^\alpha \varphi_n)\, dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \lambda_o \|u_r\|^2 + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_r)\, dx,$$

mithin

(2) $$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_r)\, dx \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(r' D^\alpha \varphi_n)\, dx + \frac{r'^2}{2n},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle r' mit $\|u_r\| \leq r' \leq r$.

Nach (H.3) gilt: Zu $\eta > 0$ $\exists\, \delta > 0$: $|t| \leq \delta \Longrightarrow |g_\alpha(t)| \leq \eta |t|$,

folglich $G_\alpha(t) = \int_o^t g_\alpha(s)\, ds \leq$

$$\leq \max\{ |g_\alpha(s)| \,;\, |s| \leq |t| \} \cdot |t| \leq \eta t^2 \quad \text{für}$$

$|t| \leq \delta$ (man beachte $g_\alpha(t)\, t \geq 0$). Damit ist gezeigt:

Zu jedem $\eta > 0$ $\exists \delta > 0$: $G_\alpha(t) \leq \eta t^2$ für $|t| \leq \delta$.

Sei nun $c_n := \max\{ |D^\alpha \varphi_n(x)| \,;\, x \in G,\ |\alpha| \leq m \}$.

Dann gilt für $0 \leq r' \leq \delta \cdot c_n^{-1}$: $G_\alpha(r' D^\alpha \varphi_n(x)) \leq \eta \cdot r'^2 |D^\alpha \varphi_n(x)|^2 \leq$

$\leq \eta \cdot r'^2 c_n^2$, für alle $|\alpha| \leq m$. Daher folgt für $0 \leq r' \leq \delta \cdot c_n^{-1}$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(r' D^\alpha \varphi_n)\, dx \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\operatorname{supp} \varphi_n} p_\alpha \eta \cdot r'^2 c_n^2\, dx =$$

$$= \eta r'^2 \cdot C(n), \text{ wobei}$$

$C(n) := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\operatorname{supp} \varphi_n} p_\alpha dx \cdot c_n^2$ sei. Wegen $p_\alpha \in L^1_{loc}(G)$ und

$\operatorname{supp} \varphi_n \subset\subset G$ ist $C(n)$ wohldefiniert und hängt offensichtlich nur von n ab. Damit ist also gezeigt worden:

Zu allen $\eta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ gibt es $r(\eta, n) > 0$ derart, daß für

(3) alle $0 \leq r' \leq r(\eta, n)$ gilt:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(r' D^\alpha \varphi_n)\, dx \leq \eta r'^2 C(n), \text{ wobei } C(n) \in \mathbb{R}^+ \text{ ist.}$$

Beweis von Beh. a) Wählt man in den Abschätzungen (2) und (3) speziell $r' := \|u_r\|$, so folgt:

(4) $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \eta > 0\ \exists C(n) > 0\ \exists r(\eta, n) > 0 : \forall 0 < r \leq r(\eta, n) :$$
$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_r)\, dx \leq \|u_r\|^2 \left(\eta \cdot C(n) + (2n)^{-1}\right).$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Man wähle zunächst n_ε so groß, daß $n_\varepsilon^{-1} \leq \varepsilon$ ist, anschließend $\eta_\varepsilon > 0$ so klein, daß $C(n_\varepsilon) \cdot \eta_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Nach (4) gibt es dann eine Zahl $r_\varepsilon :=$ $:= r(\eta_\varepsilon, n_\varepsilon) > 0$ derart, daß für alle $0 < r \leq r_\varepsilon$ gilt:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_r)\, dx \leq \|u_r\|^2 \left(\eta_\varepsilon C(n_\varepsilon) + (2n_\varepsilon)^{-1}\right) \leq \varepsilon \|u_r\|^2.$$

Damit ist gezeigt: Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $r_\varepsilon>0$ mit

$$\int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_r)\,dx \leq \varepsilon \|u_r\|^2 \text{ für } 0<r\leq r_\varepsilon, \text{ also Beh. a).}$$

Beweis von Beh. b) Mit $r' := r$ in (1) und (3) gilt:

$$m(r) = S(u_r) \leq S(r\varphi_n) \overset{(1)}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\lambda_o + n^{-1}\right) r^2 + \sum_{|\alpha|\leq m}\int_G p_\alpha G_\alpha(r\,D^\alpha\varphi_n)\,dx \overset{(3)}{\leq}$$

$$\leq r^2\cdot\frac{1}{2}\lambda_o + r^2\left(C(n)\eta + (2n)^{-1}\right),\ \forall n\in\mathbb{N},\quad 0<r\leq r(\eta,n).$$

Wie oben wähle man zunächst zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon>0$ ein $n_\varepsilon \geq \varepsilon^{-1}$ und anschließend $\eta_\varepsilon>0$ so klein, daß $C(n_\varepsilon)\cdot\eta_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist, und folglich

$$S(u_r) \leq \frac{1}{2}\lambda_o r^2 + \varepsilon\, r^2, \text{ für } 0<r\leq r_\varepsilon.$$

Wählt man nun ein festes $\varepsilon_o \in \left(0\,,\ \frac{1}{2}|\lambda_o|\right)$, dann ergibt sich für $0<r\leq r_{\varepsilon_o}$, daß $m(r) = S(u_r) < 0$ ist, woraus $u_r \not\equiv 0$ folgt. Nach Def. 6.1 b) gilt aber $m(r_2) \leq m(r_1)$ für $r_2 \geq r_1 > 0$, also auch $S(u_{r_2}) \leq S(u_{r_1})$ für $r_2 \geq r_1$. Daher ist $m(r) < 0$ für alle $r > 0$ und $\|u_r\| \neq 0$ für alle $r > 0$.

Beweis von Beh. c) Es sei im folgenden $r_i' := \|u_{r_i}\|$: nach b) gilt stets $r_i' > 0$. Aus (3) folgt für jedes feste $n\in\mathbb{N}$

$$(5)\qquad (r_i')^{-2}\sum_{|\alpha|\leq m}\int_G p_\alpha G_\alpha(r_i' D^\alpha\varphi_n)\,dx \to 0 \text{ mit } i\to\infty.$$

Weiter ist

$$B[u_{r_i}] \leq B[u_{r_i}] + 2\sum_{|\alpha|\leq m}\int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_{r_i})\,dx = 2\,S(u_{r_i}) =$$

$$\leq 2\, S(r_i' \varphi_n) = B[r_i' \varphi_n] + 2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha (r_i' D^\alpha \varphi_n)\, dx \overset{(1)}{\leq}$$

$$= (\lambda_0 + n^{-1})\, r_i'^2 + 2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha (r_i' D^\alpha \varphi_n)\, dx \,.$$

Nach Division durch $r_i'^2$ folgt mit (5):

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists i(n,\varepsilon) : \forall i \geq i(n,\varepsilon) :$$

$$B[r_i'^{-1} u_{r_i}] \leq \lambda_0 + n^{-1} + \varepsilon, \text{ oder}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists i(n) : \forall i \geq i(n) : B[r_i'^{-1} u_{r_i}] \leq \lambda_0 + 2n^{-1} \,.$$

Folglich ist $\limsup_{i \to \infty} B[r_i'^{-1} u_{r_i}] \leq \lambda_0$.

Andrerseits gilt jedoch für alle $v \in D(B)$ $\quad B[v] \geq \lambda_0 \|v\|^2$, sodaß

$$(6) \qquad \lim_{i \to \infty} B[r_i'^{-1} u_{r_i}] = \lambda_0$$

folgt. Wegen $\|r_i'^{-1} u_{r_i}\| = 1$ gibt es eine Teilfolge $(u_j) \subset (r_i'^{-1} u_{r_i})$ und ein $u_0 \in H$ mit $u_j \longrightarrow u_0$. Nach Lemma 3.2 ist dann $u_0 \in D(B)$ und $B[u_0] \leq \liminf B[u_j] = \lim B[u_j] = \lambda_0$. Wegen $B \geq \lambda_0$ und $\|u_0\| \leq 1$ gilt aber auch $B[u_0] \geq \lambda_0 \|u_0\|^2 \geq \lambda_0$ (man beachte dabei $\lambda_0 < 0$). Mithin ist

$$(7) \qquad u_0 \in D(B),\ B[u_0] = \lambda_0 \|u_0\|^2 = \lambda_0 .$$

Zugleich folgt $\|u_0\| = 1$. Aus $u_j \longrightarrow u_0$ und $\|u_0\| = \lim \|u_j\|$ ergibt sich aber $u_j \to u_0$ (vgl. Yosida [73], p. 124, Theorem 8).

Aus $B[u_j] \to B[u_o]$ (nach (6) und (7)) und $u_j \to u_o$ folgt weiter: Für alle reellen c ist

$$B[u_o] + c\|u_o\|^2 = \lim \left(B[u_j] + c\|u_j\|^2 \right) .$$

Für hinreichend großes c definiert aber

$$\|.\|_B := \left(B[.] + c\|.\|^2 \right)^{1/2}$$

eine Norm auf dem Hilbertraum D(B) (vgl. Satz 1.8). Nach Satz 1.10 gibt es eine Teilfolge $(u_{j_1}) \subset (u_j)$ mit $u_{j_1} \xrightarrow{B} u_o$. Da außerdem $\|u_o\|_B = \lim \|u_{j_1}\|_B$ ist, folgt wie oben, daß sogar

$$u_{j_1} \xrightarrow{B} u_o$$

gelten muß. Da die Folge (u_{j_1}) aus der Folge $(r_i^{-1} u_{r_i})$ ausgewählt wurde, ist damit auch die Behauptung c) bewiesen. QED

Lemma 6.4

Sei $u \in H$, $u \neq 0$. Sei W ein Teilraum von H und $\varphi_o \in W$ mit $(u,\varphi_o) = 1$. Sei $H_u := \{ v \in H ; (v,u) = 0 \}$. Es gilt: Zu jedem $\varphi \in W$ gibt es ein $\varphi_u \in H_u \cap W$ und eine Zahl α mit $\varphi = \varphi_u + \alpha\varphi_o$.

Beweis

Sei $\varphi \in W$. Dann ist auch $\psi := \varphi - (\varphi,u)\varphi_o \in W$ und $(\psi,u) = (\varphi,u) - (\varphi,u)\cdot(\varphi_o,u) = 0$, mithin $\psi \in H_u \cap W$ und $\varphi = \psi + (\varphi,u)\varphi_o$. QED

Lemma 6.5

Seien G, H und B wie in (H.1). Sei $\lambda_0 < 0$ (λ_0 nach Def. 6.1) und $\sigma_{ess}(T) \subset [0, \infty)$ (T nach Satz 1.20 zu B gehörig). Für $|\alpha| \leq m$ seien p_α, g_α und G_α gegeben, die den Bedingungen (H.2) und (H.3) genügen; für $|\alpha| = m$ seien die G_α konvex. Seien $\tilde{F}$, F und S gemäß den Def. 2.2, 2.3 und 2.4 gebildet. Schließlich sei $u \in D(S)$, $\|u\| > 0$, mit

$$S(u) \leq S(v) \text{ für alle } v \in D(S) \text{ mit } \|v\| \leq \|u\|.$$

Dann ist $u \in D(\tilde{F})$ und es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, daß u die Gleichung

$$F(u,\varphi) = \lambda(u,\varphi), \forall \varphi \in C_0^\infty(G),$$

erfüllt.

Beweis

Zunächst folgt mit Lemma 4.3, daß $u \in D(\tilde{F})$ ist.

Sei nun ein $\varphi_0 \in C_0^\infty(G)$ mit $(u,\varphi_0) = 1$ gewählt. Nach Lemma 6.4 wird dann $C_0^\infty(G)$ von φ_0 und den $C_0^\infty(G)$-Funktionen, die senkrecht auf u stehen, aufgespannt. Sei also $\varphi \in C_0^\infty(G)$ mit $(u,\varphi) = 0$. Für $a \in (0,\frac{1}{2})$ und $t \in (0,1)$ gilt dann

$$\|u + t(\varphi - au)\|^2 = \|(1-at)u + t\varphi\|^2 =$$

$$= (1-at)^2\|u\|^2 + t^2\|\varphi\|^2 + 2t(1-at)\cdot\underbrace{(u,\varphi)}_{=0} =$$

$$= \|u\|^2 - 2at\|u\|^2 + t^2(a^2\|u\|^2 + \|\varphi\|^2). \text{ Wegen } a > 0 \text{ gibt es}$$

daher ein $\eta(a) > 0$ so, daß für $t \in (0,\eta(a))$ gilt:

$$\|u + t(\pm\varphi - au)\| \leq \|u\|.$$

Nach Lemma 4.2 ist aber stets $u + t(\varphi - au) \in D(S)$; daher folgt aus der minimierenden Eigenschaft von u (vgl. die Voraussetzung) für $0 < t < \eta(a)$:

$$S(u) \leq S(u + t(\pm\varphi - au)).$$

Also ist Lemma 4.4 (mit $f = 0$) anwendbar und ergibt:

(1) $\qquad \varphi \in C_0^\infty(G),\ (u,\varphi)=0 \Longrightarrow F(u,\varphi) = 0.$

Definiert man nun

(2) $$\lambda := F(u,\varphi_0),$$

so ist zunächst einmal klar, daß die Setzung (2) von der speziellen Wahl von φ_0 unabhängig ist. Sei nämlich $\varphi_0' \in C_0^\infty(G)$ mit $(u,\varphi_0') = 1$, so folgt $(u,\varphi_0 - \varphi_0') = 0$ und somit $F(u,\varphi_0 - \varphi_0') = 0$ nach (1).

Da $F(u,.)$ linear im 2. Argument ist und $C_0^\infty(G)$ von φ_0 und den φ mit $(u,\varphi) = 0$ aufgespannt wird, ergibt sich aus (1) und (2):

$$F(u,\varphi) = \lambda(u,\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G). \quad \text{QED}$$

Satz 6.6

Seien G, H und B wie in (H.1), λ_o (nach Def. 6.1) sei < 0 und $\sigma_{ess}(T) \subset [0, \infty)$ (T nach Satz 1.20 zu B gehörig). Für $|\alpha| \leq m$ seien p_α, g_α und G_α gegeben, die den Bedingungen (H.2) und (H.3) genügen; für $|\alpha| = m$ seien die G_α konvex. Seien $\tilde{F}$, F, S und T+N wie in den Def. 2.2-2.5.

Dann gibt es zu jedem $r > 0$ ein $u_r \in D(T+N)$, $0 < \|u_r\| \leq r$, und ein $\lambda_r \in \mathbb{R}$ mit $F(u_r, \varphi) = \lambda_r(u_r, \varphi)$ für alle $\varphi \in C_o^\infty(G)$, d. h. : $(T+N)(u_r) = \lambda_r u_r$. Außerdem haben die u_r die Eigenschaft, daß $S(u_r) \leq S(v)$ gilt für alle $v \in D(S)$ mit $\|v\| \leq r$.

Bemerkung: Statt λ_r müßte man eigentlich genauer $\lambda(u_r)$ schreiben, denn zu vorgegebener Normierung r kann es verschiedene Funktionen $u_{r,1}$, $u_{r,2}$, ... geben; dabei ist dann im allgemeinen $\lambda(u_{r,1}) \neq \lambda(u_{r,2}) \neq \ldots$.

Beweis

Nach Lemma 6.2 gibt es zu $r > 0$ ein $u_r \in D(S)$ mit $\|u_r\| \leq r$ und $S(u_r) \leq S(v)$ für alle $v \in D(S)$, $\|v\| \leq r$. Nach Lemma 6.3b) weiß man $u_r \neq 0$, und aus Lemma 6.5 folgt $u_r \in D(\tilde{F})$ und die Existenz eines λ_r mit $F(u_r, \varphi) = \lambda_r(u_r, \varphi)$ für alle $\varphi \in C_o^\infty(G)$. Wegen $\lambda_r u_r \in H$ ergibt sich mit Def. 2.5, daß $u_r \in D(T+N)$ ist und $(T+N)(u_r) = \lambda_r u_r$. QED

§ 7 Verzweigung am tiefsten Eigenwert des linearen Operators

Dieser Paragraph schließt unmittelbar an Paragraph 6 an und gibt nähere Informationen über das Verhalten der u_r und λ_r für $r \to 0$ (vgl. Satz 6.6). Zunächst wird gezeigt, daß es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ so gibt, daß aus $\|u_r\| \leq \delta$ die Abschätzung $|\lambda_r - \lambda_0| \leq \varepsilon$ folgt (λ_0 wie in Def. 6.1). In Verbindung mit dem Existenzsatz 6.6 kann man daher sagen, daß λ_0 ein Verzweigungspunkt des nichtlinearen Operators T+N (nach Def. 2.4) ist. Eine entscheidende Rolle spielt dabei wieder die Bedingung (H.3), denn sie ermöglicht es, für $r \to 0$

$$r^{-1} \int p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_r) D^\alpha \varphi \, dx \to 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G),$$

zu zeigen

(Lemmata 7.2 und 7.3). Der Beweisgedanke, aus

$$r^{-2} \int p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_r) D^\alpha u_r \, dx \leq \text{const} \quad \text{auf}$$

$$r^{-1} \int p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_r) D^\alpha \varphi \, dx \to 0, \quad r \to 0, \quad \text{zu schließen,}$$

ist das [illegible] Überraschende an diesem Paragraphen (wenn überhaupt). Die Verzweigungsaussage folgt anschließend wie bei Berger [6] (oder Berger [8], p. 375 ff.) durch einfache Abschätzungen.

Aus dem Obigen läßt sich schließlich leicht ableiten, daß für alle kleinen Normierungen $r>0$ die minimierenden $u_r \in D(S)$ (die also $S(u_r) = m(r)$ und $\|u_r\| \leq r$ erfüllen) stets auf dem Rande der zulässigen Menge $\{\|v\|=r\}$ liegen; d.h. für alle $0<r<r_0$ und alle zugehörigen u_r gilt stets $\|u_r\|=r$. Dies erlaubt dann den Schluß, daß es ein ganzes Kontinuum solcher u_r geben muß, nachdem man sich zunächst mit der Existenz von abzählbar vielen u_{r_i} hatte begnügen müssen.

Lemma 7.1

Es seien die Voraussetzungen von Satz 6.6 erfüllt. Dann gibt es ein $C > 0$ derart, daß für alle $r > 0$ und alle u_r (mit u_r wie in der Behauptung von Satz 6.6) gilt:

$$|B[u_r]| + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_r) D^\alpha u_r \, dx \leq C \, \|u_r\|^2 .$$

Beweis

Wegen der minimierenden Eigenschaft $S(u_r) = m(r)$ und $\|u_r\| \leq r$ gilt nach Lemma 4.3 (mit $f = 0$)

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_r) D^\alpha u_r \, dx \leq B[u_r] .$$

Nun ist aber nach Lemma 6.3 b) für alle $r > 0$ $S(u_r) < 0$, denn sonst wäre auch die 0-Funktion eine minimierende Lösung. Wegen $S(u_r) = \frac{1}{2} B[u_r] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha (D^\alpha u_r) \, dx$ und $p_\alpha G_\alpha (D^\alpha u_r) \geq 0$ muß für alle $r > 0$ $B[u_r] < 0$ sein. Mit $B \geq \lambda_0$ folgt weiter

$$0 > B[u_r] \geq \lambda_0 \|u_r\|^2 ,$$

mithin $- B[u_r] = |B[u_r]|$ und $|B[u_r]| \leq |\lambda_0| \, \|u_r\|^2$, also

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_r) D^\alpha u_r \, dx \leq |\lambda_0| \, \|u_r\|^2 . \quad \text{QED}$$

Lemma 7.2

Es seien die Voraussetzungen des Satzes 6.6 erfüllt und u_r für $r > 0$ wie in der Behauptung von Satz 6.6. Dann gilt

für alle $K \subset\subset G$:

$$\|u_r\|^{-1} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K p_\alpha |g_\alpha(D^\alpha u_r)| \, dx \to 0, \; r \to 0.$$

Der Beweis von Lemma 7.2 stützt sich auf das folgende

Lemma 7.3

Seien p, g wie in (H.2), g erfülle zusätzlich (H.3). Die Folge $(u_i) \subset L^2(G)$ habe die Eigenschaften $\|u_i\| \neq 0$, $u_i \to 0$ und $\int_G pg(u_i)u_i \, dx \leq C \|u_i\|^2$. Dann gilt für jedes $K \subset\subset G$:

$$\|u_i\|^{-1} \int_K p|g(u_i)| \, dx \to 0, \; i \to \infty .$$

Beweis von Lemma 7.3

Nach Voraussetzung gilt für alle $i,n \in \mathbb{N}$

$$(1) \qquad n^{-1}\|u_i\|^{-2} \int_G pg(u_i)u_i \, dx \leq C \cdot n^{-1}.$$

Sei $K_{ni} := \{ x \in K ; |u_i(x)| \geq n \|u_i\| \}$ und $M_{ni} := K \setminus K_{ni}$; man denke sich wieder einen Repräsentanten u_i fest gewählt. Beide Mengen sind meßbar. Wegen $g(t)t \geq 0$ gilt

$$p|g(u_i)| \leq pg(u_i)\frac{u_i}{n\|u_i\|} \quad \text{auf } K_{ni}, \text{ also}$$

$$(2) \qquad \|u_i\|^{-1} \int_{K_{ni}} p|g(u_i)| \, dx \leq \|u_i\|^{-1} \int_{K_{ni}} pg(u_i)u_i \frac{1}{n\|u_i\|} \, dx \leq$$

$$\leq n^{-1}\|u_i\|^{-2} \int_K pg(u_i)u_i \, dx \overset{(1)}{\leq} n^{-1} \cdot C.$$

Hingegen ist auf M_{ni} $|u_i(x)| \leq n\|u_i\|$, also

$$(3) \qquad |g(u_i(x))| \leq \max \{ |g(s)| ; |s| \leq n\|u_i\| \} \text{ für } x \in M_{ni}.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ wähle man nun zunächst $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so groß, daß $C\cdot n_\varepsilon^{-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Mit (2) und (3) folgt dann für $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\|u_i\|^{-1} \int_K p|g(u_i)|\,dx =$$

$$= \|u_i\|^{-1} \int_{K_{n_\varepsilon} i} p|g(u_i)|\,dx + \|u_i\|^{-1} \int_{M_{n_\varepsilon} i} p|g(u_i)|\,dx \leq$$

$$\overset{(2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \|u_i\|^{-1} \int_{M_{n_\varepsilon} i} p|g(u_i)|\,dx \overset{(3)}{\leq} \tag{4}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|u_i\|^{-1} \int_{M_{n_\varepsilon} i} p\cdot\max\{|g(s)|\ ;\ |s|\leq n_\varepsilon\|u_i\|\}\,dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|u_i\|^{-1}\cdot\max\{|g(s)|\ ;\ |s|\leq n_\varepsilon\|u_i\|\}\cdot \int_K p\,dx.$$

Wegen $p \in L^1_{loc}(G)$ ist $C_1 := \int_K p\,dx < \infty$, sodaß aus (4) folgt:

$$\|u_i\|^{-1} \int_K p|g(u_i)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + C_1\|u_i\|^{-1}\max\{|g(s)|\ ;\ |s|\leq n_\varepsilon\|u_i\|\}.$$

Nach (H.3) gibt es zu jedem $\eta>0$ ein $\delta>0$ mit

$$|g(s)| \leq \eta|s|, \text{ falls } |s|\leq\delta,$$

also auch $\quad |g(s)| \leq \eta\delta$, falls $|s|\leq\delta$, und

$$\max\{|g(s)|\ ;\ |s|\leq\delta\} \leq \eta\delta, \text{ folglich:}$$

Zu jedem $\eta>0$ gibt es ein $\delta>0$:

$$\delta^{-1}\max\{|g(s)|\ ;\ |s|\leq\delta\} \leq \eta.$$

Wähle $\eta := \varepsilon(2n_\varepsilon(C_1+1))^{-1}$; wegen $u_i \to 0$ ist dann für $i \geq i_\varepsilon$

$$C_1\|u_i\|^{-1}\max\{|g(s)|\ ;\ |s|\leq n_\varepsilon\|u_i\|\} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sodaß}$$

für $i\geq i_\varepsilon$ folgt: $\|u_i\|^{-1} \int_K p|g(u_i)|\,dx \leq \varepsilon$. QED

Beweis von Lemma 7.2

Nach Lemma 7.1 ist

$$(1) \qquad |B[u_r]| \leq C\|u_r\|^2, \quad \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_r) D^\alpha u_r \, dx \leq C\|u_r\|^2.$$

Daher folgt aus $u_r \to 0$ auch $B[u_r] \to 0$ und somit für jedes $c > 0$: $B[u_r] + c\|u_r\|^2 \to 0$. Nach Lemma 1.23 ist aber

$$(2) \qquad \|u_r\|^2_{m,2} \leq c_1 B[u_r] + c_2\|u_r\|^2,$$

sodaß sich für $|\alpha| \leq m$ ergibt: $D^\alpha u_r \to 0$, für $r \to 0$.

Betrachtet man eine Nullfolge $(r_i) \subset (0,1)$ und ein festes α mit $|\alpha| \leq m$, dann folgt mit Lemma 7.3 für jedes $K \subset\subset G$:

$$(3) \qquad \int_K p_\alpha |g_\alpha(D^\alpha u_{r_i})| \, dx = o(\|D^\alpha u_{r_i}\|), \quad r_i \to 0,$$

denn für die Indizes i mit $D^\alpha u_{r_i} = 0$ ist nichts zu beweisen, während für die Indizes i mit $D^\alpha u_{r_i} \neq 0$ alle Voraussetzungen von Lemma 7.3 wegen (1) erfüllt sind; "o( )" sei dabei das Bachmann-Landausche Symbol. Wegen $\|D^\alpha u_{r_i}\| \leq \|u_{r_i}\|_{m,2} \leq$ $\leq \left(c_1 B[u_{r_i}] + c_2\|u_{r_i}\|^2\right)^{1/2} \leq c'\|u_{r_i}\|$ (nach (1)) folgt mit (3)

$$\int_K p_\alpha |g_\alpha(D^\alpha u_{r_i})| \, dx = o(\|u_{r_i}\|), \quad r_i \to 0, \text{ mithin}$$

$$(4) \qquad \|u_{r_i}\|^{-1} \cdot \int_K p_\alpha |g_\alpha(D^\alpha u_{r_i})| \, dx \to 0, \quad r_i \to 0,$$

da $\|u_{r_i}\| > 0$ für alle i. Wäre die Behauptung von Lemma 7.2 falsch, dann gäbe es eine Folge $(r_i) \subset (0,1)$ mit $r_i \to 0$, ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $K \subset\subset G$ derart, daß für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \int_K p_\alpha |g_\alpha(D^\alpha u_{r_i})| \, dx \geq \varepsilon_0 \|u_{r_i}\| \quad \text{wäre.}$$

Dies steht aber in unmittelbarem Widerspruch zu (4). QED

Lemma 7.4

Es seien die Voraussetzungen von Satz 6.6 erfüllt. Weiter sei $(r_i) \subset \mathbb{R}^+$ mit $r_i \to 0$ und (u_{r_i}) eine zugehörige Folge von Eigenfunktionen gemäß Satz 6.6, d.h. $\|u_{r_i}\| \leq r_i$ und $F(u_{r_i}, \varphi) = \lambda_i(u_{r_i}, \varphi)$ mit gewissen Zahlen λ_i für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Dann gilt für eine Teilfolge $(\lambda_{i_j}) \subset (\lambda_i)$:

$$\lambda_{i_j} \to \lambda_o, \quad j \to \infty .$$

Beweis

Die in Satz 6.6 betrachteten u_r haben insbesondere auch die Eigenschaft $S(u_r) = m(r)$, $r > 0$. Nach Lemma 6.3 c) gibt es daher ein $u_o \in D(B)$ mit $\|u_o\|=1$ und $B[u_o] = \lambda_o$ derart, daß nach Teilfolgenauswahl gilt:

$$\varrho_i u_{r_i} \to u_o, \quad \varrho_i u_{r_i} \xrightarrow[B]{} u_o,$$

wobei $\varrho_i := \|u_{r_i}\|^{-1}$ sei.

Da $C_0^\infty(G)$ ein core von B ist, gibt es eine Folge $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(G)$ mit $\varphi_n \xrightarrow[B]{} u_o$; o. E. kann man $\|\varphi_n\| = 1$ annehmen.

Nach Voraussetzung gilt für alle $i,n \in \mathbb{N}$:

$$F(u_{r_i}, \varphi_n) = \lambda_i(u_{r_i}, \varphi_n), \text{ oder}$$

$$(1) \qquad B[\varrho_i u_{r_i}, \varphi_n] + \varrho_i \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_{r_i}) D^\alpha \varphi_n \, dx = \lambda_i(\varrho_i u_{r_i}, \varphi_n).$$

Wegen $\varrho_i u_{r_i} \to u_o$ und $\varphi_n \to u_o$ gilt

$$|(\varrho_i u_{r_i}, \varphi_n) - 1| \leq |(\varrho_i u_{r_i} - u_o, \varphi_n)| + |(u_o, \varphi_n - u_o)| \leq$$

$$\leq \|\varphi_n\| \cdot \|\varrho_i u_{r_i} - u_o\| + \|u_o\| \cdot \|\varphi_n - u_o\| = \tag{2}$$

$$= \|\varrho_i u_{r_i} - u_o\| + \|\varphi_n - u_o\| \leq \varepsilon, \text{ falls } i \geq i_\varepsilon, n \geq n_\varepsilon.$$

Wegen $\varrho_i u_{r_i} \xrightarrow{B} u_o$ und $\varphi_n \xrightarrow{B} u_o$ gilt analog mit der Bezeichnung $(.,.)_B := B[.,.] + c\,(.,.)$ (vgl. Satz 1.8)

$$|\,(\varrho_i u_{r_i}, \varphi_n)_B - (u_o, u_o)_B\,| \leq \varepsilon, \text{ falls } n \geq n'_\varepsilon,\ i \geq i'_\varepsilon.$$

Nun ist aber $B[\varrho_i u_{r_i}, \varphi_n] = (\varrho_i u_{r_i}, \varphi_n)_B - c(\varrho_i u_{r_i}, \varphi_n)$ und $\lambda_o = B[u_o] = (u_o, u_o)_B - c(u_o, u_o)$. Also folgt

$$|\,B[\varrho_i u_{r_i}, \varphi_n] - \lambda_o\,| \leq \varepsilon + c\,|\,(\varrho_i u_{r_i}, \varphi_n) - \|u_o\|^2\,| \leq \tag{3}$$

$$\overset{(2)}{\leq} \varepsilon + c\varepsilon, \text{ falls } n \geq n_\varepsilon + n'_\varepsilon,\ i \geq i_\varepsilon + i'_\varepsilon.$$

Schließlich weiß man aus Lemma 7.2, daß für jedes feste n

$$\varrho_i \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\text{supp } \varphi_n} p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_{r_i}) D^\alpha \varphi_n \, dx \to 0,\ i \to \infty .$$

Mithin

(4) $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists j(n,\varepsilon)\colon \forall i \geq j(n,\varepsilon)\colon$

$$\Big|\varrho_i \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_{r_i}) D^\alpha \varphi_n \, dx\Big| \leq \varepsilon.$$

Wählt man nun zunächst nach (2) und (3) ein $n \geq n_\varepsilon + n'_\varepsilon$ und geht dann mit (2), (3) und (4) in (1) ein, so folgt:

Für alle $i \geq i_\varepsilon + i'_\varepsilon + j(n,\varepsilon)$ gilt

$$\frac{1}{1-\varepsilon}(\lambda_0 - 2\varepsilon) \leq \lambda_i \leq \frac{1}{1+\varepsilon}(\lambda_0 + 2\varepsilon),$$

woraus mit $\varepsilon \to 0$ die Behauptung folgt. (Man beachte in der Abschätzung, daß $\lambda_0 < 0$ ist, sodaß tatsächlich links der kleinstmögliche, rechts der größtmögliche Wert steht.) QED

Korollar 7.5

Seien die Voraussetzungen von Satz 6.6 erfüllt. Dann gilt:

a) Es gibt ein $r_0 > 0$, so daß für alle $0 < r \leq r_0$ und alle $u \in \{ w \in D(S) ; \|w\| \leq r, S(w) = m(r) \}$ gilt: $\|u\| = r$.

b) Zu jedem $0 < r \leq r_0$ gibt es ein $u_r \in D(T+N)$ mit $\|u_r\| = r$, $S(u_r) = m(r)$ und $(T+N)(u_r) = \lambda_r u_r$ mit einem $\lambda_r = \lambda(u_r) \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Zu vorgegebener Normierung r sind die minimierenden Funktionen u_r im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt; man vergleiche jedoch §10.

Beweis von Korollar 7.5

a) Angenommen, es gäbe eine Folge $(r_i) \subset (0,1)$ mit $r_i \to 0$ und dazugehörigen $u_{r_i} \in D(S)$ mit $S(u_{r_i}) = m(r_i)$ und $\|u_{r_i}\| < r_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann folgt nach Lemma 6.5: $u_{r_i} \in D(\tilde{F})$ und es gibt eine Folge $(\lambda_i) \subset \mathbb{R}$ mit

(1) $$F(u_{r_i}, \varphi) = \lambda_i (u_{r_i}, \varphi), \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Wegen $r_i \to 0$ kann man auf $((u_{r_i},\lambda_i))_{i\in\mathbb{N}}$ das Lemma 7.4 anwenden und erhält nach Teilfolgenauswahl

(2) $$\lambda_{i_j} \to \lambda_o,\ j\to\infty .$$

(Wegen (1) gilt nämlich sogar $u_{r_i} \in D(T+N)$, sodaß die u_{r_i} unter die Voraussetzungen von Lemma 7.4 fallen.)

Wegen $\lambda_o < 0$ müssen daher die $\lambda_{i_j} < 0$ sein für fast alle j.

Dies führt nun zum Widerspruch mit $\|u_{r_i}\| < r_i$:

Seien $\varphi_i \in C_o^\infty(G)$ so gewählt, daß $(u_{r_i},\varphi_i) = 1$ gilt.

Nach Lemma 4.2 ist dann für $0 < t < 1$ und $0 < a < \frac{1}{2}$

$$u_{r_i} + t(\pm\varphi_i - a u_{r_i}) \in D(S).$$

Weiter gibt es zu festem $a \in (0,\frac{1}{2})$ ein $\eta(a,i)>0$ so, daß für $t \in (0,\eta(a,i))$ gilt:

$\|u_{r_i} + t(\pm\varphi_i - a u_{r_i})\| \leq r_i$, da $\|u_{r_i}\| < r_i$ nach Annahme. Daher ist Lemma 4.4 anwendbar mit der Konsequenz, daß $F(u_{r_i},\varphi_i) = 0$ sein muß. Andrerseits folgt aber wegen $(u_{r_i},\varphi_i) = 1$ aus (1):

$$\lambda_i = F(u_{r_i},\varphi_i) = 0, \text{ für alle } i\in\mathbb{N},$$

also Widerspruch zu (2).

b) Nach Satz 6.6 gibt es zu $r>0$ ein $u_r \in D(T+N)$ mit $\|u_r\|\leq r$, $S(u_r) = m(r)$ und $(T+N)(u_r) = \lambda(u_r)u_r$. Nach Teil a) muß jedoch für $0<r\leq r_o$ stets $\|u_r\|=r$ sein. QED

Definition 7.6 (vgl. z. Bp. Singhof [67])

Sei X ein reeller Banachraum, $D \subset X$, und $T: D \to X$ ein (nichtlinearer) Operator mit $T(0) = 0$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Verzweigungspunkt von T, wenn es zu jedem Paar ε, δ positiver reeller Zahlen ein $x \in D$ mit $0 < \|x\| < \varepsilon$ und ein reelles μ mit $|\mu - \lambda| < \delta$ so gibt, daß $Tx = \mu x$ gilt.

Korollar 7.7

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.6 ist λ_0 ein Verzweigungspunkt von T+N.

Beweis

Nach Korollar 7.5 gibt es ein $r_0 > 0$ und zu jedem $0 < r \leq r_0$ ein $u_r \in D(T+N)$ und ein $\lambda_r \in \mathbb{R}$ mit $(T+N)(u_r) = \lambda_r u_r$, $\|u_r\| = r$. Wählt man eine beliebige Folge $(r_i) \subset (0, r_0)$ mit $r_i \to 0$, so folgt nach Lemma 7.4 (für eine Teilfolge)

$$\lambda_{i_j} \to \lambda_0, \quad j \to \infty .$$

Also ist λ_0 ein Verzweigungspunkt von T+N. QED

Die bislang gewonnenen Aussagen sollen der Übersichtlichkeit halber in einem Satz zusammengefaßt werden; dazu ist jedoch noch eine Definition nötig:

Definition 7.8

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.6 sei für $r > 0$

$$\Lambda_r := \{\lambda \in \mathbb{R} \; ; \; \exists u \in D(T+N), \; 0 < \|u\| \leq r, \; C(u) = m(r), (T+N)(u) = \lambda u\}.$$

Satz 7.9

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.6 gilt:

a) $\exists r_o>0\ \forall 0<r\leq r_o\ \ \exists(\lambda_r,u_r)\in \mathbb{R}\times D(T+N)$ mit $\|u_r\|=r$, $S(u_r)=m(r)$ und $(T+N)(u_r)=\lambda_r u_r$.

b) Sei Λ_r wie in Def. 7.8. $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall 0<r<\delta\ \ \forall\lambda\in\Lambda_r$:

$$|\lambda-\lambda_o|<\varepsilon.$$

Beweis

b) Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es ein $a>0$ und eine Folge (r_i,u_{r_i}) mit $r_i\in(0,1)$, $r_i\to 0$, $0<\|u_{r_i}\|\leq r_i$, $u_{r_i}\in D(T+N)$, $S(u_{r_i})=m(r_i)$ und $(T+N)(u_{r_i})=\lambda_i u_{r_i}$ mit gewissen $\lambda_i\in\mathbb{R}$, wobei für alle i gilt:

(1) $$|\lambda_i-\lambda_o|\geq a.$$

Nun kann man aber auf die Folge $((\lambda_i,u_{r_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ Lemma 7.4 anwenden und erhält $\lambda_{i_j}\to\lambda_o$ für eine Teilfolge (λ_{i_j}) im Widerspruch zu (1).

a) Folgt aus Korollar 7.5 b) und Satz 7.9 b), denn die in Korollar 7.5 b) betrachteten u_r haben alle verlangten Eigenschaften bis auf $\lambda_r<0$. Dies folgt aber, evtl. nach Verkleinerung von r_o, mittels Satz 7.9 b). QED

§ 8 Zur Abschließbarkeit des Operators T+N

Um weitere Auskunft über die Menge

$$\Lambda := \{(r,\mu);\ 0<r\leq r_0,\ \mu\in\Lambda_r\}$$

mit Λ_r nach Def. 7.8 zu erhalten, sollen Folgen (r_i, u_{r_i}) betrachtet werden (r und u_r wie in Satz 6.6).
Die dabei auftretenden Fragen hängen eng mit dem Problem der Abgeschlossenheit des Graphen von T+N in $H\times H$ zusammen, sodaß es sinnvoll erscheint, zunächst diese allgemeinere Fragestellung zu behandeln. Ergebnisse dazu finden sich etwa bei Conjura und Petryshin [18], jedoch nur für Nichtlinearitäten, die den Definitionsbereich des linearen Operators in H abbilden; strenge Nichtlinearitäten sind daher ausgeschlossen.

Für nichtlineare Operatoren, die einen abgeschlossenen Graphen besitzen, kann man einige spektral- und störungstheoretische Resultate aus der linearen Theorie übertragen (vgl. Singhof [67]), sodaß diese Fragestellung durchaus ihre Berechtigung hat.

Lemma 8.1 (vgl. z. Bp. Figueiredo und Gossez [21])

p und g mögen die Bedingungen von (H.2) erfüllen. Sei G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ und (u_n) eine Folge meßbarer Funktionen mit $u_n \xrightarrow[p.p.]{} u$ und $\int_G pg(u_n)u_n\,dx \leq C$.

Dann gilt: $pg(u)\in L^1_{loc}(G)$ und $pg(u_n)\longrightarrow pg(u)$ in $L^1_{loc}(G)$.

Beweis (vgl. [21], Lemma 3)

Sei $K\subset\subset G$. Für jedes meßbare $M\subset K$ und $r>0$ sei

$$M_{rn} := \{\, x\in M;\ |u_n(x)|\leq r \,\},\quad N_{rn} := \{\, x\in M;\ |u_n(x)|>r \,\}.$$

Dann gilt

(1) $$\int_{M_{rn}} p|g(u_n)|\,dx \leq \int_M p\,dx \cdot \max\{|g(t)|;|t|\leq r\}, \forall r>0.$$

Hingegen ist auf N_{rn} wegen $g(t)t\geq 0$

(2) $$\int_{N_{rn}} p|g(u_n)|dx \leq \frac{1}{r} \int_{N_{rn}} pg(u_n)u_n\,dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{r} \int_G pg(u_n)u_n\,dx \leq r^{-1}C.$$

Sei nun $\varepsilon>0$ vorgegeben. Zu $r_\varepsilon := 2C\varepsilon^{-1}$ wähle man ein $\delta_\varepsilon>0$ so klein, daß $\delta_\varepsilon \cdot \max\{|g(t)|;|t|\leq r_\varepsilon\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist.

Da $p|K$ in $L^1(K)$ liegt, folgt aus der Absolutstetigkeit des Lebesgue-Integrals: Es gibt ein $\eta_\varepsilon>0$, so daß für alle $M\subset K$ mit $\int_M dx \leq \eta_\varepsilon$ folgt: $\int_M p\,dx \leq \delta_\varepsilon$. In Verbindung mit den Abschätzungen (1) und (2) folgt daher für alle meßbaren $M\subset K$, für die $\mu(M) := \int_M dx \leq \eta_\varepsilon$ ist:

$\int_M p|g(u_n)|\,dx \leq \int_M p\,dx \cdot \max\{|g(t)|;|t|\leq r_\varepsilon\} + r_\varepsilon^{-1}C \leq \varepsilon$, d.h.

$M\subset K$ und $\mu(M)\leq\eta_\varepsilon \Longrightarrow \int_M p|g(u_n)|\,dx \leq \varepsilon$.

Also ist die Folge $(p\,g(u_n)|K)$ gleichgradig integrierbar. Da außerdem nach Voraussetzung $pg(u_n) \xrightarrow[p.p.]{} pg(u)$ gilt, sind die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes von Vitali (vgl. z. Bp. Dunford und Schwartz [19], p. 150) erfüllt und es folgt die Behauptung. QED

Bemerkung: Mit dem Lemma von Fatou folgt natürlich $pg(u)u \in L^1(G)$ und daher auch $pg(u) \in L^1_{loc}(G)$.

Satz 8.2

Seien G, H und B wie in (H.1), jedoch zusätzlich $B \geq c > 0$, und für $|\alpha| < m$ Funktionen p_α, g_α und G_α gemäß (H.2) gegeben. Seien $\tilde{F}$, S und T+N wie in Def. 2.2, 2.4 und 2.5,

$\overline{D} := \{ w \in D(T+N) ; \tilde{F}(w) \leq (f,w), S(w) \leq (f,w) \}$, wobei $f := (T+N)(w)$ sei, und $\overline{T+N} := (T+N)|\overline{D}$. Sei $(u_n) \subset \overline{D}$ mit $u_n \rightharpoonup u \in H$ und $(\overline{T+N})(u_n) =: f_n \longrightarrow f \in H$. Dann ist $u \in \overline{D}$ und $(\overline{T+N})(u) = f$.

Bemerkung: Die in Satz 5.1 gewonnenen Lösungen u des Dirichletproblems liegen in $\overline{D}$, denn für sie ist $S(u) - (f,u) \leq 0$ und $S(u) - (f,u) \leq S(v) - (f,v), \forall v \in D(S)$, sodaß nach Lemma 4.3 gilt: $\tilde{F}(u) \leq (f,u)$.

Beweis

Nach Voraussetzung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$B[u_n] + \sum_{|\alpha|<m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_n) D^\alpha u_n \, dx \leq (f_n, u_n).$$

Alle Terme auf der linken Seite sind ≥ 0, während die rechte Seite beschränkt ist; daher gilt

$$B[u_n] \leq \text{const}, \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_n) D^\alpha u_n \, dx \leq \text{const}, \quad |\alpha| < m.$$

Aus $u_n \rightharpoonup u$ und $B[u_n] \leq \text{const}$ folgt nach Korollar 1.10, daß $u \in D(B)$ ist und für eine Teilfolge $(u_{n_j}) \subset (u_n)$

$u_{n_j} \xrightarrow[B]{} u$ gilt, also insbesondere

(1) $\quad B[u_{n_j}, \varphi] \to B[u, \varphi]$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

Wegen $D(B) \subset H_o^{m,2}(G)$ und $B[u_n] \leq \text{const}$, $\|u_n\| \leq \text{const}$, folgt mit Lemma 1.24 für eine Teilfolge $(u_{n_l}) \subset (u_{n_j})$:

$$D^\alpha u_{n_l} \xrightarrow[\text{p.p.}]{} D^\alpha u, \text{ für } |\alpha| < m.$$

Nun kann man Lemma 8.1 anwenden und erhält

$$p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_{n_l}) \to p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) \text{ in } L^1_{loc}(G), \ |\alpha| < m, \text{ mithin}$$

$$(2) \quad \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_{n_l}) D^\alpha \varphi \, dx \to \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha \varphi \, dx, \ \forall \varphi \in C_o^\infty(G).$$

Schließlich folgt aus $f_n \longrightarrow f$ sofort

$$(3) \quad (f_n, \varphi) \to (f, \varphi), \text{ für alle } \varphi \in C_o^\infty(G).$$

Nach Voraussetzung weiß man jedoch für $\forall\, l \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in C_o^\infty(G)$

$$B[u_{n_l}, \varphi] + \sum_{|\alpha| < m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_{n_l}) D^\alpha \varphi \, dx = (f_n, \varphi) .$$

Daraus folgt mit $l \to \infty$ und (1), (2), (3) :

$$(4) \quad B[u, \varphi] + \sum_{|\alpha| < m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha \varphi \, dx = (f, \varphi), \ \forall \varphi \in C_o^\infty(G).$$

Es bleibt $u \in D(\widetilde{F}) \cap D(S)$ und $\widetilde{F}(u) \leq (f,u)$ bzw. $S(u) \leq (f,u)$ nachzuweisen. Wegen der schwachen unteren Halbstetigkeit von S (Lemma 3.5) ergibt sich aus $u_n \to u$ und $S(u_n) \leq (f_n, u_n) \leq$ $\leq$ const, daß $u \in D(S)$ ist und $S(u) \leq \liminf S(u_n) \leq$

$= \liminf (f_n, u_n) = \lim (f_n, u_n) = (f,u)$, da $f_n \longrightarrow f$.

Weiterhin ist nach Satz 1.10 (wegen $B \geq 0$)

$$(5) \quad B[u] \leq \liminf B[u_n].$$

Wegen $\int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_n) D^\alpha u_n \, dx \leq \text{const}$ und $D^\alpha u_{n_l} \xrightarrow[\text{p.p.}]{} D^\alpha u$

für $|\alpha|<m$ folgt mit dem Lemma von Fatou

$$(6)\quad \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha u\,dx \leq \liminf \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_{n_1})D^\alpha u_{n_1}\,dx.$$

Also ist $u \in D(\widetilde{F})$. Weiter gilt nach (5) und (6)

$$\widetilde{F}(u) \leq \liminf \widetilde{F}(u_{n_1}) \leq \liminf (f_n,u_n) = \lim (f_n,u_n) = (f,u).$$

Mit (4) folgt $u \in D(\overline{T+N})$, $(T+N)(u) = f$. QED

Bemerkung: Falls auch Nichtlinearitäten $p_\alpha g_\alpha(.)$ für $|\alpha|=m$ auftreten, kann man mit den Methoden aus dem Beweis von Satz 8.4 zu einem entsprechenden Ergebnis gelangen, wenn man die Einschränkung des Operators T+N auf die Menge der in Satz 5.1 gewonnenen Lösungen betrachtet und $f_n \to f$ voraussetzt. Dann hängen nämlich die Zahlen $S(u_n)-(f_n,u_n)$ stetig von n ab; wegen der minimierenden Eigenschaften eines jeden u_n kann man dann wie im Beweis zu Satz 8.4 auf die punktweise Konvergenz der Ableitungen bis zur m-ten Ordnung schließen. Es scheint, daß sich die von Simader in [65] durchgeführte Methode nicht auf diesen Kontext übertragen läßt, da die von Simader betrachteten Folgen speziell konstruiert sind und daher zusätzliche Eigenschaften besitzen.

Lemma 8.3

Es seien die Voraussetzungen von Satz 6.6 erfüllt und

$m(r) = \inf \{ S(u) ; u \in D(S), \|u\| \leq r \}$ wie in Def. 6.1.

Dann ist m(r) stetig auf $[0, \infty)$.

Beweis

Sei $(r_i) \subset (0, \infty)$ mit $r_i \to r \geq 0$. Nach Lemma 6.2 gibt es Elemente $u_i \in D(S)$ mit $\|u_i\| \leq r_i$ und $S(u_i) = m(r_i)$.

1. Fall: "r=0". Dann ist $B[u_i] \geq \lambda_o \|u_i\|^2 \geq \lambda_o r_i^2 \to 0$, also, mit $p_\alpha G_\alpha(.) \geq 0$, lim inf $S(u_i) \geq 0$. Andrerseits ist aber $S(u_i) \leq S(0) = 0$ für alle i, sodaß lim $S(u_i) = 0$ folgt.

2. Fall: "r>0". Für $w \in D(S)$ und $0 \leq h \leq 1$ gilt

$$S(hw) = \frac{1}{2} h^2 B[w] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(hD^\alpha w)\, dx \leq \tag{1}$$

$$\leq \frac{1}{2} h^2 B[w] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha w)\, dx,$$

denn wegen $g_\alpha(t)t \geq 0$ ist $G_\alpha(ht) \leq G_\alpha(t)$ für $0 \leq h \leq 1$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Aus $S(u_i) \leq 0$ und $\|u_i\| \leq r_i \leq r_o$ folgt

$\lambda_o r_o^2 \leq \lambda_o \|u_i\|^2 \leq B[u_i] \leq 0$, und somit $|B[u_i]| \leq$ const.

Nach Lemma 6.2 gibt es zu r ein $u_r \in D(S)$ mit $\|u_r\| \leq r$ und $S(u_r) = m(r)$.

Falls nun $r_i < r$ ist (für ein $i \in \mathbb{N}$), so ist nach Def. 6.1

$$S(u_i) \geq S(u_r). \tag{2}$$

Wegen $\|r_i r^{-1} u_r\| \leq r_i$ ist zunächst $S(u_i) \leq S(r_i r^{-1} u_r)$, sodaß man mit (1) weiterschließen kann:

$$S(u_i) \leq r_i^2 r^{-2} \frac{1}{2} B[u_r] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_r)\, dx.$$

Wegen $r_i r^{-1} \to 1$, $i \to \infty$, folgt daher mit (2):

$$m(r_{i_j}) = S(u_{i_j}) \to S(u_r) = m(r),$$

für jede Teilfolge $(r_{i_j}) \subset (r_i)$ mit $r_{i_j} < r$.

Falls $r_i > r$ ist, so gilt umgekehrt $S(u_i) \leq S(u_r)$, und wegen $S(u_r) \leq S(r_i^{-1} r u_i)$ folgt wieder mit (1)

$S(u_r) \leq r_i^{-2} r^2 \frac{1}{2} B[u_i] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha (D^\alpha u_i)\, dx$, sodaß (wegen $r_i^{-1} r \to 1$, $i \to \infty$, und $|B[u_i]| \leq$ const.) folgt:

$S(u_r) \leq \liminf S(u_{i_j})$, für jede Teilfolge $(r_{i_j}) \subset (r_i)$ mit $r_{i_j} > r$. Damit ist insgesamt $m(r_i) = S(u_i) \to S(u_r) = m(r)$ gezeigt.

QED

Satz 8.4

Es seien die Voraussetzungen von Satz 6.6 erfüllt und r_o wie in Satz 7.9. Sei $(r_i) \subset (0, r_o)$ mit $r_i \to r \geq 0$. Weiter sei $(u_i) \subset D(T+N)$, $\|u_i\| = r_i$, $S(u_i) = m(r_i)$ und mit gewissen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gelte $(T+N)(u_i) = \lambda_i u_i$ und $\lambda_i \to \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $u \in D(T+N)$ mit $\|u\| = r$, $S(u) = m(r)$, $(T+N)(u) = \bar{\lambda} u$, und eine Folge $(u_{i_l}) \subset (u_i)$ mit $\|u_{i_l} - u\|_{m,2} \to 0$, $l \to \infty$.

Beweis

1.) Falls $r_i \to 0$, so folgt aus Lemma 7.9 b) $\lambda_i \to \lambda_o$, und nach Lemma 6.3 c), verknüpft mit Lemma 1.23, $\|u_{i_j}\|_{m,2} \to 0$, sodaß die Behauptung mit $u = 0$ und $\bar{\lambda} = \lambda_o$ erfüllt ist.

2.) Sei nun $r > 0$. Wegen $\|u_i\| \leq r_o$ ist

$\lambda_o r_o^2 \leq \lambda_o \|u_i\|^2 \leq B[u_i] \leq 2S(u_i) < 0$, und somit

(1) $\qquad |S(u_i)| \leq$ const., $|B[u_i]| \leq$ const.

Es gibt eine Teilfolge $(u_{i_j}) \subset (u_i)$ und ein $u \in H$ mit $u_{i_j} \rightharpoonup u$. Nach Lemma 3.5 weiß man dann $u \in D(S)$ und

$$S(u) \leq \liminf S(u_{i_j}).$$

Nun ist aber nach Lemma 8.3 $\lim S(u_{i_j}) = \lim m(r_{i_j}) = m(r)$,

da $r_{i_j} \to r$, $j \to \infty$. Also ist $S(u) \leq m(r)$.

Da $\|u_{i_j}\| \leq r_{i_j}$ und $u_{i_j} \longrightarrow u$ gilt, ist $\|u\| \leq \liminf \|u_{i_j}\| \leq$

$\leq \lim r_{i_j} = r$, sodaß $S(u) \geq m(r)$ sein muß. Damit ist gezeigt:

(2) $$S(u) = m(r), \quad \|u\| \leq r.$$

Also ist Lemma 6.5 anwendbar, mit dem Ergebnis, daß

$u \in D(\tilde{F})$ ist und mit einem reellen λ gilt:

(3) $$F(u,\varphi) = \lambda(u,\varphi), \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Daraus folgt insbesondere auch $u \in D(T+N)$.

Es bleibt noch $\lambda = \overline{\lambda}$ zu zeigen.

Wegen $r_{i_j}, r \in (0, r_o]$ folgt nach Korollar 7.5, daß $\|u\| = r$ sein muß, sodaß in Verbindung mit $u_{i_j} \longrightarrow u$ folgt:

(4) $$u_{i_j} \to u.$$

(Hier wurde verwendet, daß schwache Konvergenz + Konvergenz der Normen bereits starke Konvergenz impliziert.)

Weiter ist nach Lemma 3.2 $B[u] \leq \liminf B[u_{i_j}]$ (dabei wurde von (1) Gebrauch gemacht). Wegen (1) und Lemma 1.24 gibt es eine Teilfolge $(u_{i_k}) \subset (u_{i_j})$ mit den Eigenschaften

$$D^\alpha u_{i_k} \xrightarrow[\text{p.p.}]{} D^\alpha u, \text{ für } |\alpha| < m$$

$$D^\alpha u_{i_k} \longrightarrow D^\alpha u, \text{ für } |\alpha| = m.$$

Wegen (1) sind alle $\int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_i)\, dx \leq$ const., sodaß mit

den Lemmata 3.3 und 3.4 für alle $|\alpha| \leq m$ folgt:

$$\int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\, dx \leq \liminf \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_{i_k})\, dx.$$

Wäre nun $B[u] < \liminf B[u_{i_k}]$, so würde

$$m(r) = S(u) < \liminf \frac{1}{2} B[u_{i_k}] + \sum_{|\alpha| \leq m} \liminf \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_{i_k})\, dx \leq$$

$$\leq \liminf \Big(\frac{1}{2} B[u_{i_k}] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u_{i_k})\, dx \Big) =$$

$$= \liminf m(r_{i_k}) = \lim m(r_{i_k}) = m(r) \text{ folgen,}$$

also Widerspruch. Mithin gibt es eine Teilfolge

$(u_{i_l}) \subset (u_{i_k})$, für die gilt:

$$B[u_{i_l}] \to B[u],\ l \to \infty . \tag{5}$$

In Verbindung mit (4) ergibt sich daraus für alle $c>0$

$$B[u_{i_l}] + c\|u_{i_l}\|^2 \to B[u] + c\|u\|^2,\ l \to \infty . \tag{6}$$

Für hinreichend großes c ist aber $(B[.]+c\|.\|^2)^{1/2}$ eine Norm auf dem Hilbertraum D(B); sie sei hier mit $\|.\|_B$ bezeichnet. Nach Lemma 1.24 gilt für eine Teilfolge $(u_{i_m}) \subset (u_{i_l})$ $\quad u_{i_m} \xrightarrow[B]{} u$, sodaß, mit derselben Argumentation wie oben, aus $\|u\|_B = \lim \|u_{i_m}\|_B$

$$u_{i_m} \xrightarrow[B]{} u,\ m \to \infty , \tag{7}$$

folgt. Nach Lemma 1.23 impliziert dies jedoch

$\|u_{i_m} - u\|_{m,2} \to 0$, also auch für $(u_{i_n}) \subset (u_{i_m})$

$$D^\alpha u_{i_n} \xrightarrow[p.p.]{} D^\alpha u, \text{ für alle } |\alpha| \leq m. \tag{8}$$

Nun fährt man ähnlich wie im Beweis zu Satz 8.2 fort:

Nach Voraussetzung gilt für alle u_{i_n} und alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$

$$F(u_{i_n},\varphi) = \lambda_{i_n}(u_{i_n},\varphi).$$

Sei speziell φ_0 so gewählt, daß $(u,\varphi_0) = 1$ ist, folglich auch $(u_{i_n},\varphi_0) \to 1$, $n \to \infty$. Daher kann man für $i_n \geq i_0$ schreiben:

$$\lambda_{i_n} = \frac{1}{(u_{i_n},\varphi_0)} F(u_{i_n},\varphi_0). \tag{9}$$

Nach (7) konvergiert $B[u_{i_n},\varphi_0] \to B[u,\varphi_0]$.

Nach Lemma 4.3 ist für alle n

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_{i_n}) D^\alpha u_{i_n}\, dx \leq -B[u_{i_n}] \leq \text{const.}$$

Zusammen mit der punktweisen Konvergenz nach (8) folgt daraus mittels Lemma 8.1

$$p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_{i_n}) \to p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) \text{ in } L^1_{loc}(G), \text{ mithin}$$

$$\int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_{i_n}) D^\alpha \varphi_0\, dx \to \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha \varphi_0\, dx, \quad |\alpha| \leq m.$$

Zusammengenommen ergibt sich aus (9)

$$\lambda_{i_n} \to B[u,\varphi_0] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha \varphi_0\, dx = F(u,\varphi_0) \overset{(3)}{=}$$

$$= \lambda(u,\varphi_0) = \lambda.$$

Nun galt aber nach Voraussetzung $\lambda_i \to \overline{\lambda}$, sodaß $\lambda = \overline{\lambda}$ gezeigt ist. QED

Korollar 8.5

Es seien die Voraussetzungen von Satz 6.6 erfüllt. Sei $r'>0$. Zu jedem $0<r<r'$ gebe es genau ein $u_r \in D(T+N)$ mit $S(u_r)=m(r)$, $\|u_r\| \leq r$. Jedes u_r genüge mit einem $\lambda_r \in (\lambda_0-1,0)$ der Gleichung $F(u_r,\varphi) = \lambda_r(u_r,\varphi)$, für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Dann ist die Abbildung $Q: [0,r') \to \mathbb{R}\times H_0^{m,2}(G)$, $Q(r) := (\lambda_r, u_r)$, stetig, falls man $Q(0) := (\lambda_0, 0)$ setzt.

Beweis

Annahme: Es gibt ein $\varrho \in [0,r')$, eine Folge $(r_i) \subset (0,r')$ und ein $\delta>0$ derart, daß $r_i \to \varrho$ und $|\lambda_{r_i} - \lambda_\varrho| \geq \delta$ oder $\|u_{r_i} - u_\varrho\|_{m,2} \geq \delta$, für alle $i\in\mathbb{N}$; für $\varrho=0$ sei dabei $u_\varrho = 0$ und $\lambda_\varrho = \lambda_0$ gewählt. Wegen $(\lambda_{r_i}) \subset (\lambda_0-1,0)$ besitzt die Folge (λ_{r_i}) einen Häufungspunkt $\bar\lambda$. Nach Satz 8.4 gibt es ein $\bar u \in D(T+N)$ und eine Teilfolge $(u_{r_{i_m}}) \subset (u_{r_i})$ mit $S(\bar u)=m(\varrho)$, $\|\bar u\| \leq \varrho$, $F(\bar u,\varphi) = \bar\lambda(\bar u,\varphi)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$ und $\|u_{r_{i_m}} - \bar u\|_{m,2} \to 0$. Nun gibt es aber nach Voraussetzung bereits ein $u_\varrho \in D(\tilde F)$ mit $S(u_\varrho)=m(\varrho)$, $\|u_\varrho\| \leq \varrho$ und $F(u_\varrho,\varphi) = \lambda_\varrho(u_\varrho,\varphi)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Zunächst gilt nun im Falle $\varrho=0$, daß $\bar u = u_\varrho = 0$ und, wegen Lemma 7.9 b), $\lambda_{r_i} \to \lambda_0$ sein muß, sodaß die Annahme zum Widerspruch geführt ist. Falls $\varrho>0$ ist, so muß wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit der minimierenden u_r stets $\bar u = u_\varrho$ sein, also auch $\bar\lambda = \lambda_\varrho$ und $\lambda_{r_{i_m}} \to \lambda_\varrho$, $\|u_{r_{i_m}} - u_\varrho\|_{m,2} \to 0$, im Widerspruch zur Annahme. QED

§9 Bilinearformen mit Potentialen $p_\alpha \widetilde{g}_\alpha(D^\alpha u)$

In den Paragraphen 5 und 6 sind Aussagen des Typs $F(u,\varphi) = (f,\varphi)$ bzw. $F(u,\varphi) = \lambda_u(u,\varphi)$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(G)$, hergeleitet worden. Für manche weiterreichende Untersuchungen ist jedoch $C_0^\infty(G)$ zu klein. Beispielsweise erscheint es wünschenswert, an Stelle von φ auch die Lösungen u selbst einsetzen zu können, was etwa die Aussage

$$\lambda_r = \|u_r\|^{-2} \widetilde{F}(u_r)$$

erlauben würde (vgl. §6). Statt nun u sofort durch Funktionen φ zu approximieren, werden hier zunächst Bilinearformen eingeführt, die aus B und Zusatztermen $\int p_\alpha \widetilde{g}_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha \varphi D^\alpha \psi \, dx$ bestehen; anschließend wird nachgewiesen, daß $C_0^\infty(G)$ ein core dieser Formen ist. Schwierigkeiten und Beweismethoden sind im wesentlichen dieselben wie bei direkter Approximation in der Gleichung $F(u,\varphi) = (f,\varphi)$, jedoch ermöglicht dieser Weg in Verbindung mit Satz 1.27 Aussagen über den Zusammenhang zwischen dem linearen Problem und dem nichtlinear gestörten bei kleinen Normierungen. Es stellt sich nämlich heraus, daß die mit den Potentialen $p_\alpha \widetilde{g}_\alpha(D^\alpha u)$ gebildeten Operatoren T_u im Sinne starker Resolventenkonvergenz gegen den ungestörten Operator T konvergieren, wenn die Normierung von u klein wird.

Def. 9.1

Es seien G, H und B wie in (H.1) und für $|\alpha| \leq m$ Funktionen p_α und g_α gegeben, die den Bedingungen (H.2) und (H.3) genügen. Weiter sei $\widetilde{F}$ gemäß Def. 2.2 gebildet, $u \in D(\widetilde{F})$ (sodaß insbesondere $p_\alpha \widetilde{g}_\alpha(D^\alpha u) \in L^1_{loc}(G)$ ist). Dann wird die Bilinearform B_u auf

$$D(B_u) := \{ \varphi \in D(B) : \int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha \varphi)^2 \, dx < \infty , \ |\alpha| \leq m \}$$

definiert durch

$$B_u[\varphi,\psi] := B[\varphi,\psi] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha \varphi D^\alpha \psi \, dx.$$

Lemma 9.2

Sei B_u wie in Def. 9.1. Dann ist B_u dicht definiert, symmetrisch, halbbeschränkt und abschließbar.

Beweis

Wegen $p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u) \in L^1_{loc}(G)$ ist $C_0^\infty(G) \subset D(B_u)$, sodaß B_u dicht definiert ist. Da B symmetrisch ist, und die Terme $\int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha \varphi D^\alpha \psi \, dx$ in φ und ψ symmetrisch sind, ist auch B_u symmetrisch. Weiter ist B halbbeschränkt und $p_\alpha \tilde{g}_\alpha(.) \geq 0$ nach (H.3), sodaß B_u halbbeschränkt ist. Um nun noch die Abschließbarkeit von B_u zu zeigen, soll das Kriterium von Satz 1.7 verwendet werden.

Sei also $(\varphi_n) \subset D(B_u)$ mit $\varphi_n \to 0$ und $B_u[\varphi_n - \varphi_m] \to 0$ mit $n,m \to \infty$. Zu zeigen ist: $B_u[\varphi_n] \to 0$.
Sei $c \geq 0$ so gewählt, daß $B_u + c \geq 1$ ist; dann gilt auch $(B_u+c)[\varphi_n - \varphi_m] \to 0$, oder, ausgeschrieben:

$$(B+c)[\varphi_n - \varphi_m] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi_m)^2 \, dx \to 0 .$$

Da jeder einzelne Term nichtnegativ ist, müssen bereits alle Terme einzeln gegen 0 konvergieren, d.h. für $n,m \to \infty$

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(B+c)[\varphi_n-\varphi_m] \to 0 \\ &\int_G p_\alpha \widetilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha\varphi_n - D^\alpha\varphi_m)^2 \, dx \to 0, \quad |\alpha|\leq m. \end{aligned}$$

Aus $\varphi_n \to 0$ und $B[\varphi_n-\varphi_m] \to 0$ folgt wegen der Abschließbarkeit von B: $(B+c)[\varphi_n] \to 0$ und somit

$$(2)\qquad B[\varphi_n] \to 0, \quad n \to \infty .$$

Wegen $D(B) \subset H_o^{m,2}(G)$ folgt daraus mit Lemma 1.23

$$(3)\qquad D^\alpha\varphi_n \to 0 \text{ für } \forall\, |\alpha|\leq m.$$

Weiterhin sind die 'nichtlinear erzeugten Potentiale' $q_{u,\alpha} := p_\alpha \widetilde{g}_\alpha(D^\alpha u) \geq 0$ und nach (1) gilt

$$\int_G q_{u,\alpha}(D^\alpha\varphi_n - D^\alpha\varphi_m)^2 \, dx \to 0.$$

Nach Beispiel 1.17 sind jedoch Formen des Typs $\int q u\bar{v}\, dx$, mit $q \in L^1_{loc}$ und $q \geq 0$, abschließbar. Daher folgt aus (3) und Satz 1.7

$$(4)\qquad \int_G q_{u,\alpha}(D^\alpha\varphi_n)^2 \, dx \to 0, \quad n \to \infty .$$

Aus (2) und (4) ergibt sich aber $B_u[\varphi_n] \to 0$. QED

Bemerkung: Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß B_u sogar abgeschlossen ist (was aber im weiteren Verlauf nicht benötigt werden wird) :

Lemma 9.3

Unter den Voraussetzungen von Lemma 9.2 ist B_u auf $D(B_u)$ abgeschlossen.

Beweis

Sei $(\varphi_n) \subset D(B_u)$ mit $\varphi_n \xrightarrow[B]{} \varphi \in H$, d.h. $\varphi_n \to \varphi$ und $B_u[\varphi_n-\varphi_m] \to 0$, $n,m \to \infty$. Wie im Beweis zu Lemma 9.2 folgt

(1) $\quad B[\varphi_n-\varphi_m] \to 0, \quad \varphi_n \to \varphi.$

Nach Satz 1.8 ist $D(\widetilde{B}_u)$ ein Hilbertraum unter dem Skalarprodukt $(.,.)_{\widetilde{B}_u} := \widetilde{B}_u[.,.] + c(.,.)$. Daher folgt aus $B_u[\varphi_n-\varphi_m] \to 0$ und $\varphi_n \to \varphi$ insbesondere auch $B_u[\varphi_n] \le C$, d.h.

(2) $\quad B[\varphi_n] \le C, \quad \int_G p_\alpha \widetilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha \varphi_n)^2 \, dx \le C.$

Da B abgeschlossen ist, ergibt sich aus (1): $\varphi \in D(B)$ und $B[\varphi_n-\varphi] \to 0$, mithin (nach Lemma 1.23), $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$, $|\alpha| \le m$, und $D^\alpha \varphi_{n_j} \to D^\alpha \varphi$, p.p. Daher folgt mit (2) und dem Lemma von Fatou: $p_\alpha \widetilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha \varphi)^2 \in L^1(G)$, also $\varphi \in D(B_u)$. Schließlich ergibt sich $B_u[\varphi_n-\varphi] \to 0$ aus der Abschließbarkeit von B_u.

QED

Lemma 9.4

Sei $\widetilde{F}$ wie in Def. 2.2, wobei die g_α zusätzlich der Bedingung (H.5) genügen mögen. Dann ist $\{ u \in H \; ; \; \exists \, \mu > 0 : \mu u \in D(\widetilde{F}) \}$ ein linearer Teilraum von H.

Beweis

Seien $v,w \in D(\widetilde{F})$ und $|\alpha| \le m$. Dann gilt für $0<\delta<1/2$:

$$\int_G p_\alpha g_\alpha (\delta(D^\alpha v + D^\alpha w))\delta(D^\alpha v + D^\alpha w) \, dx \le$$

$$\le c \int_G p_\alpha h_\alpha (\delta(D^\alpha v + D^\alpha w))\delta(D^\alpha v + D^\alpha w) \, dx \le \qquad \text{(H.5)}$$

$$\le c \int_G p_\alpha h_\alpha (D^\alpha v) D^\alpha v \, dx + c \int_G p_\alpha h_\alpha (D^\alpha w) D^\alpha w \, dx \le$$

$\leq c \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha v) D^\alpha v \, dx + c \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha w) D^\alpha w \, dx < \infty$, da $v,w \in D(\tilde{F})$. QED

Lemma 9.4 macht es nunmehr möglich, B_u auf $D(\tilde{F})$ einzuschränken:

Def. 9.5

Es sei B_u wie in Def. 9.1; darüberhinaus sollen die g_α der Bedingung (H.5) genügen. Dann bezeichne $B_{u,F}$ die Einschränkung von B_u auf

$$D(B_{u,F}) := \{ \varphi \in D(B_u) \; ; \exists \delta > 0 : \delta\varphi \in D(\tilde{F}) \} .$$

Nach Lemma 9.4 ist $D(B_{u,F})$ ein linearer Raum. Als Einschränkung von B_u ist $B_{u,F}$ symmetrisch, halbbeschränkt und abschließbar und wegen $C_0^\infty(G) \subset D(\tilde{F})$ auch dicht definiert.

Lemma 9.6

Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$, $f(t) \geq 0$, konvex. Sei $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ so, daß auch $f(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Sei für $\varepsilon > 0$ j_ε Kern der Friedrichsschen Glättung wie in Def. 1.31. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^N$:

$$f(j_\varepsilon * u)(x) \leq (j_\varepsilon * f(u))(x)$$

Beweis (vgl. Hewitt und Stromberg [33], p. 202)

Für jedes feste x betrachte man $K_\varepsilon(x) := \{ y \; ; \; |x-y| < \varepsilon \}$, versehen mit dem Maß $j_\varepsilon(x-y) \, dy$. Dann sind $u|K_\varepsilon(x)$ und

$f(u)|K_\varepsilon(x)$ integrabel bzgl. $j_\varepsilon(x-y)\,dy$, und es folgt mit der 2. Jensenschen Ungleichung ([33], p. 202)

$$f\Big(\int_{K_\varepsilon(x)} u(y)\,j_\varepsilon(x-y)\,dy\Big) \le \int_{K_\varepsilon(x)} f(u(y))\,j_\varepsilon(x-y)\,dy,$$

also $f(j_\varepsilon * u)(x) \le (j_\varepsilon * f(u))(x)$. QED

Lemma 9.7

Seien g und h wie in (H.5). Dann gibt es ein $c>0$ derart, daß für alle $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ mit $g(u)u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(j_\varepsilon * u)(j_\varepsilon * u)\,dx \le c \int_{\mathbb{R}^N} g(u)u\,dx, \quad \varepsilon>0.$$

Beweis

Nach (H.5) ist $0 \le h(u)u \le c_1^{-1}\, g(u)u$, p.p., also auch

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(u)u\,dx \le c_1^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} g(u)u\,dx.$$

Nach Satz 1.32 a) ist $\int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon * (h(u)u)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} h(u)u\,dx$, da $h(u)u \ge 0$ p.p. Mit Lemma 9.6 folgt hieraus

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(j_\varepsilon * u)(j_\varepsilon * u)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon * (h(u)u)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} h(u)u\,dx \le$$
$$\le c_1^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} g(u)u\,dx.$$

Nach (H.5) ist aber

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(j_\varepsilon * u)(j_\varepsilon * u)\,dx \le c_2 \int_{\mathbb{R}^N} h(j_\varepsilon * u)(j_\varepsilon * u)\,dx,$$

sodaß sich insgesamt

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(j_\varepsilon * u)(j_\varepsilon * u)\,dx \le c_1^{-1} c_2 \int_{\mathbb{R}^N} g(u)u\,dx \text{ ergibt. QED}$$

Def. 9.8

Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f \in L^q(G)$, $1 \le q \le \infty$. Dann wird

$\hat{f}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definiert durch $\hat{f}(x) := f(x)$, falls $x \in G$,

$\hat{f}(x) := 0$, falls $x \notin G$.

Lemma 9.9

Falls $v \in H_o^{m,p}(G)$ so ist $\hat{v} \in H_o^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ und es gilt:

$D^\alpha \hat{v} = \widehat{D^\alpha v}$ und $\|\hat{v}\|_{H_o^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = \|v\|_{H_o^{m,p}(G)}$. ($|\alpha| \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$)

Beweis

Adams [1], p. 57, Lemma 3.22 und Beweis dazu.

Def. 9.10

$G \subset \mathbb{R}^N$, offen (und beschränkt oder unbeschränkt) heiße sternförmig bezüglich 0, wenn für alle $0<k<1$ gilt:

$G_k := \{ x ; k^{-1}x \in G \} \subset G$ und $\operatorname{dist}(G_k, \partial G) > 0$.

Lemma 9.11 (Approximationslemma)

Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ sternförmig, H und B wie in (H.1), jedoch mit $D(B) = H_o^{m,2}(G)$. Für $|\alpha| \leq m$ seien p_α mit $0<a \leq p_\alpha \leq b$ gegeben und g_α gemäß (H.4) und (H.5). Sei $\tilde{F}$ wie in Def. 2.2, $u \in D(\tilde{F})$ und $B_{u,F}$ wie in Def. 9.5.

Dann ist $C_o^\infty(G)$ ein core von $B_{u,F}$.

Beweis

1. Schritt: Sei $w \in D(B_{u,F})$ gegeben. Nach Def. 9.5 ist also $w \in H_o^{m,2}(G)$ und es gibt ein $\mu > 0$ mit $\mu w \in D(\tilde{F})$, d.h. für $|\alpha| \leq m$ ist $p_\alpha g_\alpha(\mu D^\alpha w) D^\alpha w \in L^1(G)$.

Sei zunächst $\mu \geq 2^m$ vorausgesetzt. Definiert man für $0<k<1$

$$(1) \qquad w_k(x) := w(k^{-1}x),$$

so folgt aus der Sternförmigkeit von G, daß es ein $\delta_k > 0$ gibt mit $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} w_k, \partial G) \geq \delta_k$.

Weiter folgt aus der Kettenregel durch Induktion über $|\alpha|$

$$(2) \qquad D^\alpha w_k(x) = k^{-|\alpha|}(D^\alpha w)(k^{-1}x), \quad |\alpha| \leq m.$$

Also ist mit w auch $w_k \in H_o^{m,2}(G)$.

Für $0<k<1$ und $\varepsilon_k := \min\{\frac{1}{4}\delta_k, 1-k\}$ definiert man nun

$$(3) \qquad w_{k,\varepsilon_k} := j_{\varepsilon_k} \ast w_k.$$

Dann ist $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} w_{k,\varepsilon_k}, \partial G) \geq \frac{1}{2}\delta_k > 0$. Nach Satz 1.32 e) ist $\widehat{w_{k,\varepsilon_k}} = j_{\varepsilon_k} \ast \widehat{w_k} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$, also $w_{k,\varepsilon_k} \in C_b^\infty(G)$.

Mit $k \to 1$ konvergiert $\varepsilon_k \to 0$. Wegen der Linearität des Glättungsoperators ist (mit $w_\varepsilon := j_\varepsilon \ast w, \forall \varepsilon > 0$)

$$\|w - w_{k,\varepsilon_k}\| = \|w - j_{\varepsilon_k} \ast (w_k - w + w)\| \leq$$

$$\leq \|w - w_{\varepsilon_k}\| + \|j_{\varepsilon_k} \ast (w_k - w)\| \overset{\text{(Satz 1.32 a)}}{\leq}$$

$$\leq \|w - w_{\varepsilon_k}\| + \|w_k - w\|.$$

Nach Satz 1.31 a) gilt $\|w - w_{\varepsilon_k}\| \to 0$ mit $k \to 1$, denn $k \to 1$ impliziert $\varepsilon_k \to 0$. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varphi \in C_o^\infty(G)$ mit $\|w - \varphi\| \leq \delta$, also auch $\|w_k - \varphi_k\| \leq \delta$ (mit $\varphi_k(x) := \varphi(k^{-1}x)$). Nun kann man wie folgt abschätzen:

$$\|w - w_k\| \leq \|w - \varphi\| + \|\varphi - \varphi_k\| + \|w_k - \varphi_k\| \leq 2\delta + \|\varphi - \varphi_k\|.$$

Es ist aber $\varphi_k \to \varphi$, $k \to 1$, nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue, denn wegen der Stetigkeit von φ gilt $\varphi_k \underset{p.p.}{\to} \varphi$; weiter gilt $|\varphi_k| \leq \chi_{\text{supp } \varphi} \cdot \max_G |\varphi| \in L^1(G)$.

Daher folgt insgesamt

$$w_{k,\varepsilon_k} \to w, \quad k \to 1 . \tag{4}$$

Wegen $\varepsilon_k < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} w_k, \partial G)$ ist mit $w_k \in H_o^{m,2}(G)$ auch $w_{k,\varepsilon_k} \in H_o^{m,2}(G)$ und mit Satz 1.32 a und b erhält man für $|\alpha| \leq m$ die Abschätzungen $\|D^\alpha \widehat{w_{k,\varepsilon_k}}\| = \|j_{\varepsilon_k} \widehat{D^\alpha w_k}\| \leq$ $\leq \|\widehat{D^\alpha w_k}\| = \|D^\alpha w_k\| \overset{(2)}{\leq} k^{-|\alpha|} \|D^\alpha w\| \leq k^{-m} \|D^\alpha w\|$, mithin

$$\|w_{k,\varepsilon_k}\|_{m,2} \leq C \|w\|_{m,2} \text{ für } \tfrac{1}{2} < k < 1. \tag{5}$$

Nach Voraussetzung ist $D(B) = H_o^{m,2}(G)$. Daher gilt nach Lemma 1.23 $B[u] \leq C \|u\|_{m,2}^2$ für alle $u \in D(B)$.

Daher folgt aus (5)

$$B[w_{k,\varepsilon_k}] \leq C' \text{ für alle } k \in (\tfrac{1}{2}, 1). \tag{6}$$

Da die g_α der Bedingung (H.4) genügen, gilt für alle t,s $\widetilde{g}_\alpha(t)s^2 \leq c g_\alpha(t)t + c g_\alpha(s)s$. Folglich hat man für $|\alpha| \leq m$ und $\frac{1}{2} < k < 1$:

$$\int_G p_\alpha \widetilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha w_{k,\varepsilon_k})^2 dx \leq$$

$$\leq c \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u \, dx + c \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha w_{k,\varepsilon_k}) D^\alpha w_{k,\varepsilon_k} \, dx \leq$$

Satz 1.32 b)

$$\leq c_1 + c_2 \int_{\mathbb{R}^N} g_\alpha (j_{\varepsilon_k} * \widehat{D^\alpha w_k})(j_{\varepsilon_k} * \widehat{D^\alpha w_k}) \, dx \leq$$

Lemma 9.7

$$\leq c_1 + c_2 \int_G g_\alpha (D^\alpha w_k) D^\alpha w_k \, dx \leq$$

(H.5)

$$\leq c_1 + c_2' \int_{G_k} h_\alpha (D^\alpha w_k) D^\alpha w_k \, dx =$$

(2)

$$= c_1 + c_2' \int_{G_k} h_\alpha \Big(k^{-|\alpha|} (D^\alpha w)(k^{-1}x) \Big) \big(k^{-|\alpha|} (D^\alpha w)(k^{-1}x) \big) dx \leq$$

$h_\alpha(t)t$ konvex

$$\leq c_1 + c_2' \int_{G_k} h_\alpha \Big(2^m (D^\alpha w)(k^{-1}x) \Big) \big(2^m (D^\alpha w)(k^{-1}x) \big) \, dx =$$

Transformation

$$= c_1 + c_2' k^N \int_G h_\alpha (2^m D^\alpha w) 2^m D^\alpha w \, dx \leq$$

(H.5)

$$\leq c_1 + c_3 \int_G g_\alpha (2^m D^\alpha w) 2^m D^\alpha w \, dx.$$

(Man beachte stets $\frac{1}{2} < k < 1$). Nach Voraussetzung war $2^m w \in D(\widetilde{F})$, sodaß das Integral $\int_G g_\alpha (2^m D^\alpha w) 2^m D^\alpha w \, dx$ existiert.

Daher kann man aus den obigen Abschätzungen schließen:

$$(7) \qquad \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha w_{k,\varepsilon_k}) D^\alpha w_{k,\varepsilon_k} dx < \infty, \quad 1/2 < k < 1,$$

$$(8) \qquad \int_G p_\alpha \widetilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha w_{k,\varepsilon_k})^2 \, dx \leq \text{const}, \quad \tfrac{1}{2} < k < 1, \quad |\alpha| \leq m.$$

Wegen (8) ist $w_{k,\varepsilon_k} \in D(B_u)$ und mit (6) gilt

$$(9) \qquad B_u[w_{k,\varepsilon_k}] \leq \text{const.}, \quad \tfrac{1}{2} < k < 1.$$

Außerdem ersieht man aus (7), daß sogar $w_{k,\varepsilon_k} \in D(\widetilde{F})$ gilt und folglich

(10) $\quad w_{k,\varepsilon_k} \in D(B_{u,F}),$ falls $\frac{1}{2} < k < 1.$

Also gilt für $k \to 1$ (nach (4) und (9))

(11) $\quad w_{k,\varepsilon_k} \to w,\ B_{u,F}[w_{k,\varepsilon_k}] \leq \text{const.}$

Nun kann man sich von der Zusatzannahme $2^m w \in D(\tilde{F})$ lösen:

Sei nämlich $w \in D(B_{u,F})$ beliebig, also $\mu w \in D(\tilde{F})$ mit einem $\mu > 0$. Dann erfüllt $w' := \frac{1}{2^m}\,\mu w$ die Zusatzvoraussetzung, und nach (11) gilt $w'_{k,\varepsilon_k} \to w'$ und $B_{u,F}[w'_{k,\varepsilon_k}] \leq \text{const}$, $k \to 1$.

Also gilt auch

(12) $\quad w_{k,\varepsilon_k} \to w,\ B_{u,F}[w_{k,\varepsilon_k}] \leq \text{const},\ k \to 1,$

denn $B_{u,F}$ ist eine Bilinearform.

Da $w_{k,\varepsilon_k} \in H_o^{m,2}(G) \cap C_b^\infty(G)$ ist und $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} w_{k,\varepsilon_k}, \partial G) > 0$, ergibt sich aus (11) mittels Lemma 1.12:

$\{\, v \in H_o^{m,2}(G)\ ;\ v \in C_b^\infty(G),\ \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial G) > 0 \,\}$ ist ein core von $B_{u,F}$.

2. Schritt: Sei nun $v \in D(B_{u,F}) \cap C_b^\infty(G)$ und $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial G) > 0$.

Weiter sei $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\varphi(t) = 1$ für $|t| \leq 1$,

$\varphi(t) = 0$ für $|t| \geq 2$, $0 \leq \varphi \leq 1$ sonst, und

$\varphi_k(x) := \varphi(k^{-1}|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$, alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $\varphi_k v \in C_o^\infty(G)$.

Nach der Leibnizregel (vgl. Adams [1], p. 2 und p. 21) gilt für $|\alpha| \leq m$

$$D^\alpha(\varphi_k v) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi_k \, D^{\alpha-\beta} v,$$

wobei wie üblich $\beta \le \alpha$ komponentenweise definiert ist und $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \binom{\alpha_N}{\beta_N}$. Wegen $\max \{ |D^\alpha \varphi_k(x)| ; x \in \mathbb{R}^N \} \le$

$\le C\, k^{-|\alpha|}$ kann man abschätzen

$$(13) \qquad |D^\alpha(\varphi_k v)| \le M \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^{\alpha-\beta} v|,$$

folglich

$$(14) \qquad \|\varphi_k v\|_{m,2} \le C \|v\|_{m,2}, \text{ also } B[\varphi_k v] \le C' \cdot B[v], \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue konvergiert

$$(15) \qquad \varphi_k v \to v, \; k \to \infty .$$

Weiter gilt für $|\alpha| \le m$

$$\int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha(\varphi_k v))^2 \, dx \le$$

$$(16) \qquad \overset{(H.4)}{\le} c \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u \, dx + c \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha(\varphi_k v)) D^\alpha(\varphi_k v) dx.$$

Wegen $v \in C_0^\infty(G)$ und $|D^\alpha \varphi_k| \le c\, k^{-|\alpha|}$ ergibt sich aus (13):

$\exists R > 0$ mit $|D^\alpha(\varphi_k v)| \le R$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $|\alpha| \le m$.

Mit (H.4) genügen die g_α insbesondere auch der Bedingung

(H.3); daher gibt es zu R ein $c_R > 0$ mit

$$g_\alpha(t) t \le c_R \cdot t^2 \text{ für } |t| \le R.$$

Folglich kann man in (16) weiter abschätzen

$$\int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha(\varphi_k v)) D^\alpha(\varphi_k v) \, dx \le$$

$$\le b c_R \int_G |D^\alpha(\varphi_k v)|^2 \, dx \le b c_R \|\varphi_k v\|_{m,2}^2 \overset{(14)}{\le} C' \|v\|_{m,2}^2 .$$

Damit ist insgesamt gezeigt: $\varphi_k v \in C_o^\infty(G)$, $\varphi_k v \to v$ mit $k \to \infty$, und $B_{u,F}[\varphi_k v] = B_u[\varphi_k v] \leq$ const. Mit Hilfe von Lemma 1.12 folgt, daß $C_o^\infty(G)$ ein core von

$$B_{u,F} \mid \{v \in D(B_{u,F}); v \in C_b^\infty(G), \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial G) > 0\} \text{ ist.}$$

Da die Relation 'A liegt dicht in B' transitiv ist, folgt nun Lemma 9.11 aus dem 1. und 2. Schritt. QED

Die folgende Bedingung an G verallgemeinert den Fall eines sternförmigen Gebietes:

Def. 9.12 (Adams [1], p. 54)

Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen. G hat die Segmenteigenschaft genau dann, wenn es zu jedem $x \in \partial G$ eine offene Menge U_x und einen Vektor $y_x \neq 0$ gibt, sodaß $x \in U_x$ ist und für $z \in \overline{G} \cap U_x$ gilt: $z + t y_x \in G$ für $0 < t < 1$.

Bemerkung: (Adams [1], p. 54, p. 67) Wenn G die Segmenteigenschaft hat, ist ∂G (N-1)-dimensional und G liegt nur auf einer Seite des Randes. Die Kegelbedingung impliziert die Segmentbedingung.

Lemma 9.13 (vgl. Adams [1], Theorem 3.18, p. 54)

$G \subset \mathbb{R}^N$, offen und beschränkt, besitze die Segmenteigenschaft. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

a) $\{ u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) ; \operatorname{supp} u \subset \overline{G} \} \subset H_o^{m,p}(G)$.

b) Sei $u \in H_o^{m,p}(G)$ mit $|u(x)| \leq$ const. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_n) \subset C_o^\infty(G)$ mit $\varphi_n \to u$ in $H_o^{m,p}(G)$ und

$\max \{ |\varphi_n(x)| ; x \in G \} \leq \operatorname{ess\,sup} u = \|u\|_\infty , \forall n \in \mathbb{N}.$

c) Seien g_α für $|\alpha| \leq m$ gemäß (H.2)-(H.5) gegeben, die außerdem $g_\alpha(t)t \leq c \cdot g_\beta(t)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, für $\beta < \alpha$, erfüllen mögen. Sei $u \in H_o^{m,p}(G)$ mit $\int_G g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha u \, dx < \infty$ für $|\alpha| \leq m$. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_n) \subset C_o^\infty(G)$ mit $\varphi_n \to u$ in $H_o^{m,p}(G)$ und $\int_G g_\alpha(\mu D^\alpha \varphi_n)D^\alpha \varphi_n \, dx \leq$ const für ein $\mu > 0$.

Beweis

Der Beweis folgt zunächst nahezu wörtlich dem Beweis von Theorem 3.18 in Adams [1] (und zwar von der drittletzten Zeile auf p. 54 an); um nicht zu viele Schwierigkeiten zu häufen, soll hier nur der Fall 'G beschränkt' behandelt werden. Sei also $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ mit $K := \operatorname{supp} u \subset \overline{G}$. Da G beschränkt ist, ist die Menge $F := \{ y \in K ; y \notin U_x, \forall x \in \partial G \}$ kompakt und in G enthalten, wobei die U_x offene Mengen gemäß der Definition der Segmenteigenschaft sind. Es gibt eine offene Menge U_o so, daß $F \subset U_o \subset\subset G$. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Mengen U_x (diese endlich vielen sollen in $U_1, \ldots, U_k$ umbenannt werden) derart, daß

$$K \subset U_o \cup U_1 \cup \ldots \cup U_k.$$

Sei Ψ eine C^∞- Zerlegung der Einheit, die $\{U_j ; 0 \leq j \leq k\}$ untergeordnet ist (vgl. Adams [1], p. 51, Theorem 3.14), und

sei ψ_j die Summe der endlich vielen Funktionen $\psi \in \Psi$, deren Träger in U_j liegen. Dann sei

(1) $$u_j := \psi_j u, \quad 0 \leq j \leq k.$$

Nimmt man an, man könnte für jedes j ein $\varphi_j \in C_0^\infty(G)$ so finden, daß

(2) $$\|u_j - \varphi_j\|_{W^{m,p}(G)} < \varepsilon/k+1,$$

dann würde mit der Setzung

(3) $$\varphi = \sum_{j=0}^{k} \varphi_j$$

folgen: $$\|\varphi - u\|_{W^{m,p}(G)} \leq \sum_{j=0}^{k} \|\varphi_j - u_j\|_{W^{m,p}(G)} < \varepsilon.$$

Eine Funktion $\varphi_0 \in C_0^\infty(G)$, die (2) für $j=0$ erfüllt, kann man nach Satz 1.31 c) und d) durch die Friedrichssche Glättung erhalten, da supp $u_0 \subset U_0 \subset\subset G$. Man muß daher noch Funktionen φ_j finden, die (2) für $1 \leq j \leq k$ erfüllen.
Für die Funktion

(4) $$w_{j,t}(x) := u_j(x-ty), \quad 0 < t < 1,$$

gilt supp $w_{j,t} = \{ x+ty \; ; \; x \in \text{supp } u_j \}$; dabei ist $y \neq 0$ der Vektor, der zu U_j nach der Segmenteigenschaft gehört. Es ist $x+ty \in G$, falls $x \in U_j \cap \overline{G}$. Wegen supp $u_j \subset U_j \cap \overline{G}$ ist

$$\text{supp } w_{j,t} \subset G \text{ und supp } w_{j,t} \text{ kompakt.}$$

Da das Lebesgue-Integral stetig unter Translationen ist, folgt für $t \to 0+$

$$D^\alpha \widehat{w_{j,t}} \to D^\alpha \widehat{u_j} \text{ in } L^p(\mathbb{R}^N),\ |\alpha| \leq m, \text{ mithin}$$

$$\widehat{w_{j,t}} \to \widehat{u_j} \text{ in } H_o^{m,p}(\mathbb{R}^N),\ t \to 0+.$$

Insbesondere folgt daraus $w_{j,t} \to u_j$ in $W^{m,p}(G)$.

Wegen supp $w_{j,t} \subset G$ und supp $w_{j,t}$ kompakt, kann man nun für hinreichend kleines $\varepsilon = \varepsilon(t)$

(5) $\qquad j_\varepsilon * w_{j,t}$

betrachten. Dann gilt $j_\varepsilon * w_{j,t} \in C_o^\infty(G)$ und $j_\varepsilon * w_{j,t} \to w_{j,t}$ in $H_o^{m,p}(G)$ mit $\varepsilon \to 0$, also auch

(6) $\qquad j_\varepsilon * w_{j,t} \to u_j$ in $H_o^{m,p}(G)$ mit $t \to 0$, $\varepsilon(t) \to 0$.

Damit ist a) bewiesen.

Zum Beweis von b) berücksichtige man, daß für alle $\varepsilon > 0$

$$\|j_\varepsilon * w_{j,t}\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} \int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(\cdot - y)\widehat{w_{j,t}}(y)\, dy \leq$$

$$\leq \operatorname{ess\,sup} w_{j,t} = \|w_{j,t}\|_\infty = \|u_j\|_\infty \leq \|u\|_\infty \quad (\text{vgl. (1), (4) und (5)}),\ 1 \leq j \leq k.$$

Entsprechend ist für $j=0$

$\|j_\varepsilon * u_o\|_\infty \leq \|u_o\|_\infty \leq \|u\|_\infty$. Damit ist auch b) bewiesen.

Es soll gezeigt werden, daß die gemäß (1) - (5) konstruierten Funktionen die in c) behaupteten Eigenschaften besitzen. Sei also wieder $\varphi := \sum_{j=0}^{k} \varphi_j$, φ_j wie oben.

Sei h_α gemäß (H.5) zu g_α gehörig. Wegen $h_\alpha(t)t$ konvex gilt

(7) $$h_\alpha\Big(\sum_0^s t_i\Big)\Big(\sum_0^s t_i\Big) \leq (s+1)^{-1} \sum_{i=0}^{s} h_\alpha((s+1)t_i)(s+1)t_i =$$

$$\sum_{i=0}^{s} h_\alpha((s+1)t_i)t_i,\ t_i \in \mathbb{R},\ i=0,\ldots,s.$$

Man kann nun abschätzen

$$\int_G g_\alpha(D^\alpha\varphi)D^\alpha\varphi \, dx \overset{(H.5)}{\leq} \int_G h_\alpha\Big(\sum_0^k D^\alpha\varphi_j\Big)\Big(\sum_0^k D^\alpha\varphi_j\Big) \, dx \overset{(7)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{j=0}^k \int_G h_\alpha((k+1)D^\alpha\varphi_j)D^\alpha\varphi_j \, dx \overset{\text{(Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals)}}{=}$$

$$= \sum_{j=0}^k \int_{\mathbb{R}^N} h_\alpha\Big((k+1)j_{\varepsilon_j} * D^\alpha(\widehat{\psi_j u})\Big)\cdot\Big(j_{\varepsilon_j} * D^\alpha(\widehat{\psi_j u})\Big) \, dx \overset{\text{(Lemma 9.7)}}{\leq}$$

$$\leq c\sum_{j=0}^k \int_G h_\alpha((k+1)D^\alpha(\psi_j u))D^\alpha(\psi_j u) \, dx \overset{\text{(Leibniz)}}{=}$$

$$= c\sum_{j=0}^k \int_G h_\alpha\Big((k+1)\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta}\psi_j\Big)\cdot\Big(\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta}\psi_j\Big) \, dx =$$

$$=: A. \text{ Mit } c_1 := (k+1)m!\cdot\max\{\,|D^\alpha\psi_j(x)| \;;\; x\in G,\ 0\leq j\leq k,\ |\alpha|\leq m\,\}$$

kann man weiter abschätzen:

$$A \leq c'\sum_{j=0}^k \int_G h_\alpha\Big(c_1\sum_{\beta\leq\alpha} D^\beta u\Big)\cdot\Big(\sum_{\beta\leq\alpha} D^\beta u\Big) \, dx \overset{(7)}{\leq}$$

$$\leq c''\sum_{j=0}^k \sum_{\beta\leq\alpha} \int_G h_\alpha(c_1 N^{m+1} D^\beta u)\, D^\beta u \, dx \overset{(H.5)}{\leq}$$

$$\leq c'''\sum_{\beta\leq\alpha} \int_G g_\alpha(CD^\beta u)D^\beta u \, dx \overset{\text{(Voraussetzung)}}{\leq}$$

$$\leq c_4 \sum_{\beta\leq\alpha} \int_G g_\beta(CD^\beta u)\, D^\beta u \, dx, \text{ mit } C := c_1 N^{m+1}.$$

Daher folgt in Verbindung mit (3): Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(G)$ mit $\|\varphi_\varepsilon - C^{-1}u\|_{m,p} < \varepsilon$ und, für $|\alpha|\leq m$,

$$\int_G g_\alpha(D^\alpha\varphi_\varepsilon)D^\alpha\varphi_\varepsilon \, dx \leq c_4 \sum_{\beta\leq\alpha} \int_G g_\beta(D^\beta u)D^\beta u \, dx < \infty .$$

QED

Lemma 9.14 (Approximationslemma)

$G \subset \mathbb{R}^N$, offen und beschränkt, besitze die Segmenteigenschaft. Seien H und B wie in (H.1) mit $D(B) = H_o^{m,2}(G)$. Für $|\alpha| \leq m$ seien g_α gegeben, die den Bedingungen (H.2) - (H.5) genügen, und p_α mit $0 < a \leq p_\alpha \leq b$. Außerdem gelte $g_\alpha(t)t \leq c\, g_\beta(t)t$ falls $\beta \leq \alpha$. Sei $\widetilde{F}$ nach Def. 2.2, $u \in D(\widetilde{F})$ und $B_{u,F}$ gemäß Def. 9.5.

Dann ist $C_o^\infty(G)$ ein core von $B_{u,F}$.

Beweis

Sei $w \in D(B_{u,F})$. Nach Lemma 9.14 c) gibt es eine Folge $(\varphi_n) \subset C_o^\infty(G)$ mit $\varphi_n \to w$ in $H_o^{m,2}(G)$ und

$$\int_G g_\alpha(\mu D^\alpha \varphi_n) D^\alpha \varphi_n \, dx \leq \text{const. für ein } \mu > 0.$$

Folglich ist $B[\varphi_n] \leq \text{const}$ und für $|\alpha| \leq m$

$$\int_G p_\alpha \widetilde{g}_\alpha(D^\alpha u)(D^\alpha \varphi_n)^2 \, dx \leq b\mu^{-2} \int_G \widetilde{g}_\alpha(D^\alpha u)(\mu D^\alpha \varphi_n)^2 \, dx \leq \tag{H.4}$$

$$\leq b\mu^{-2} \int_G g_\alpha(D^\alpha u) D^\alpha u \, dx + b\mu^{-2} \int_G g_\alpha(\mu D^\alpha \varphi_n) \mu D^\alpha \varphi_n \, dx \leq$$

$\leq$ const. Mithin: $\varphi_n \to w$ und $B_{u,F}[\varphi_n] \leq$ const.

Die Behauptung folgt nun mit Lemma 1.12. QED

Lemma 9.15

Sei G beschränkt und offen, $w \in H_o^{m,2}(G)$ mit $D^\alpha w \in L^p(G)$ für $|\alpha| = m$ und ein $p \geq 2$. Dann ist $w \in W^{m,p}(G)$ und $\hat{w} \in H_o^{m,2}(\mathbb{R}^N) \cap W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Beweis

Wegen $D^\alpha\hat{w} = \widehat{D^\alpha w}$ nach Lemma 9.9 und $D^\alpha w \in L^p(G)$ für $|\alpha|=m$, nach Voraussetzung, ist für $|\alpha|=m$ $D^\alpha\hat{w} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Setzt man $G_1 := \{ x\in\mathbb{R}^N;\ \mathrm{dist}(x,G)<1 \}$, so gilt auch $D^\alpha\hat{w}|G_1 \in L^p(G_1)$, $|\alpha|=m$. Außerdem hat $\hat{w}$ kompakten Träger in G_1, sodaß $w_\varepsilon := j_\varepsilon * \hat{w}|G_1 \in C_o^\infty(G_1)$ ist für $0<\varepsilon<1$. Nach der Poincaréschen Ungleichung für C_o^∞-Funktionen (vgl. z. Bp. Morrey [49], p. 69, oder Gilbarg und Trudinger [22], p.157) folgt $\|w_\varepsilon\|_{W^{m,p}(G_1)} \le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha w_\varepsilon\|_{L^p(G_1)}$. Wegen Satz 1.32 b) ist aber $\|D^\alpha w_\varepsilon\|_{L^p(G_1)} = \|j_\varepsilon * D^\alpha\hat{w}\|_{L^p(G_1)} \overset{1.32\ a)}{\le} \|D^\alpha\hat{w}\|_{L^p(G_1)} = \|D^\alpha w\|_{L^p(G)}$. Also gilt für $0<\varepsilon<1$

$$(1) \qquad \|w_\varepsilon\|_{W^{m,p}(G_1)} \le C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha w\|_{L^p(G)}.$$

Wegen $\hat{w}\in H_o^{m,2}(\mathbb{R}^N)$ konvergieren mit $\varepsilon \to 0$ die Funktionen $D^\alpha w_\varepsilon \longrightarrow D^\alpha\hat{w}$, $|\alpha|\le m$. Da $W^{m,p}(G_1)$ ein reflexiver Banachraum ist, gibt es wegen (1) ein $v\in W^{m,p}(G_1)$ und eine Folge (w_{ε_j}) mit $w_{\varepsilon_j} \longrightarrow v$ in $W^{m,p}(G_1)$. Also gilt insbesondere auch $w_{\varepsilon_j} \longrightarrow v$ in $L^p(G_1)$, sodaß wegen $p\ge 2$ und G_1 beschränkt $w_{\varepsilon_j} \longrightarrow v$ in $L^2(G_1)$ folgt. Nun weiß man aber bereits $w_\varepsilon \to \hat{w}$, $\varepsilon \to 0$, sodaß $v = \hat{w}|G_1$ folgt und damit $\hat{w}\in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, da $v\in W^{m,p}(G_1)\cap H_o^{m,2}(G_1)$. QED

Lemma 9.16

Sei $2 \leq p < \infty$ und $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $|g(t)t| \leq c\,|t|^p$.

$\tilde{g}(t) := t^{-1}g(t)$ sei stetig mit $\tilde{g}(0) = 0$, u und $v \in L^p(G)$, $G \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann gilt

$$\int_G \tilde{g}(u)v^2\,dx \leq c\,\|u\|_p^{(p-2)/p}.\|v\|_p^{2/p}.$$

Beweis

$$\int_G \tilde{g}(u)v^2\,dx \leq c \int_G |u|^{p-2}v^2\,dx \leq \quad \text{(Höldersche Ungleichung)}$$

$$\leq c\left[\int_G |u|^{(p-2)\frac{p}{p-2}}\,dx\right]^{\frac{p-2}{p}}\left[\int_G v^2\,\frac{p}{2}\,dx\right]^{\frac{2}{p}} =$$

$$= c\,\|u\|_p^{(p-2)/p}.\|v\|_p^{2/p}, \text{ denn es ist } (p-2)/p + 2/p = 1.$$

QED

Lemma 9.17 (Hedbergs Lemma; Hedberg [29])

Sei $1 < p < \infty$ und $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ mit $0 \leq v \leq 1$, so daß $(1-v)u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ist und $\|vu\|_{m,p} < \varepsilon$.

Beweis

Für $mp > N$ folgt die Behauptung aus dem Sobolevschen Einbettungssatz (Adams [1], Th. 5.4, p. 97).

Für $mp \leq N$: Hedberg [29] oder Webb [71].

Bemerkung: Das Hedbergsche Lemma verallgemeinert das in $W^{1,p}(G)$ übliche Abschneideverfahren, bei dem u durch $u^{(n)}(x) := (\operatorname{sign} u(x)) \cdot \min\{n, |u(x)|\}$ approximiert wird.

Def. 9.18

Sei $G \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Sei $2 \leq p < \infty$ und B_u wie in Def. 9.1. Dann wird die Bilinearform $B_{u,p}$ erklärt als Einschränkung von B_u auf

$$D(B_{u,p}) := \{ \varphi \in D(B_u) \; ; \; D^\alpha \varphi \in L^p(G) \text{ für } |\alpha| = m \}.$$

Lemma 9.19 (Approximationslemma)

$G \subset \mathbb{R}^N$, offen und beschränkt, besitze die Segmenteigenschaft. Seien H und B wie in (H.1) mit $D(B) = H_o^{m,2}(G)$. Für $|\alpha| = 0$ seien p_o, g_o wie in (H.2), $p_o \in L^1(G)$. Für $|\alpha| = m$ gebe es ein $p \geq 2$ und Funktionen g_α mit

$$c_1 |t|^p \leq g_\alpha(t)t \leq c_2 |t|^p, \; \forall t \in \mathbb{R},$$

und p_α mit $0 < a \leq p_\alpha \leq b$. Schließlich gebe es zu $0 < |\alpha| < m$ g_α, p_α mit $0 \leq p_\alpha \leq c$ und

$$0 \leq g_\alpha(t)t \leq C |t|^p \quad \text{(Der Exponent p könnte mit dem Sobolevschen Einbettungssatz verbessert werden)}.$$

Sei $\tilde{F}$ wie in Def. 2.2, $u \in D(\tilde{F})$ und $B_{u,p}$ nach Def. 9.18. Dann ist $C_o^\infty(G)$ ein core von $B_{u,p}$.

Beweis (man vergleiche mit Webb [71], p. 129 f.)

1. Schritt: Sei $w \in D(B_{u,p})$, d.h. $w \in H_o^{m,2}(G)$, $D^\alpha w \in L^p(G)$ für $|\alpha| = m$ und $\int_G p_o \tilde{g}_o(u) w^2 \, dx < \infty$. Nach Def. 9.8 sei $\hat{w}$ die Fortsetzung durch 0 auf $\mathbb{R}^N$. Mit Lemma 9.15 folgt nun zunächst

$$\hat{w} \in H_o^{m,2}(\mathbb{R}^N) \cap W^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

Nach Lemma 9.17 gibt es zu $\hat{w}$ und jedem $\varepsilon>0$ ein $\varphi_\varepsilon \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ mit $0\le\varphi_\varepsilon\le 1$, $\|\varphi_\varepsilon\hat{w}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$ und $(1-\varphi_\varepsilon)\hat{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Daher ist $(1-\varphi_\varepsilon)\hat{w} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ und somit auch

$$(1-\varphi_\varepsilon)\hat{w}|G \in W^{m,p}(G).$$

Wegen supp $\hat{w}$ = supp $w \subset \overline{G}$ (da $w \in H_o^{m,2}(G)$) und $0\le\varphi_\varepsilon\le 1$ gilt auch supp $(1-\varphi_\varepsilon)w \subset \overline{G}$. Mit Lemma 9.13 a) erhält man daher

(1) $$(1-\varphi_\varepsilon)w \in H_o^{m,p}(G).$$

Mit $p\ge 2$ und G beschränkt folgt natürlich auch

(2) $$(1-\varphi_\varepsilon)w \in H_o^{m,2}(G) \text{ und } \|\varphi_\varepsilon w\|_{m,2} \le c'\,\varepsilon.$$

Daher gilt für $\varepsilon \to 0$

(3) $$(1-\varphi_\varepsilon)w \to w \quad \text{und} \quad B[(1-\varphi_\varepsilon)w] \le \text{const.}$$

Weiter ist für $|\alpha|=0$ wegen $0\le\varphi_\varepsilon\le 1$

$$p_o\tilde{g}_o(u)((1-\varphi_\varepsilon)w)^2 \le p_o\tilde{g}_o(u)w^2, \text{ mithin}$$

(4) $$\int_G p_o\tilde{g}_o(u)((1-\varphi_\varepsilon)w)^2 dx \le \int_G p_o\tilde{g}_o(u)w^2\,dx.$$

Für $1\le|\alpha|\le m$ ist nach Lemma 9.16

$$\int_G p_\alpha\tilde{g}_\alpha(D^\alpha u)(D^\alpha((1-\varphi_\varepsilon)w))^2\,dx \le$$

$$\le c''\|u\|_{m,p}^{(p-2)/p}\,\|(1-\varphi_\varepsilon)w\|_{m,p}^{2/p}.$$ Dabei ist zu beachten, daß $u \in D(\tilde{F})$ ist, also auch $D^\alpha u \in L^p(G)$ für $|\alpha|=m$, sodaß mit Lemma 9.15 $u \in W^{m,p}(G)$ folgt. Damit ist insgesamt gezeigt:

(5) $(1-\varphi_\varepsilon)w \to w$ und $B_{u,p}[(1-\varphi_\varepsilon)w] \leq \text{const}$, $\varepsilon \to 0$.

Mittels Lemma 1.12 kann man nun aus (5) und (1) schließen, daß $H_o^{m,p}(G) \cap L^\infty(G)$ ein core von $B_{u,p}$ ist.

2. Schritt: Sei nun $w \in H_o^{m,p}(G) \cap L^\infty(G)$. Dann gibt es nach Lemma 9.13 b) eine Folge $(\varphi_n) \subset C_o^\infty(G)$ mit

(6) $\varphi_n \to w$ in $H_o^{m,p}(G)$ und $\|\varphi_n\|_\infty \leq \|w\|_\infty$.

Wieder folgt aus der Beschränktheit von G und $p \geq 2$, daß auch $\varphi_n \to w$ in $H_o^{m,2}(G)$ gilt und somit

(7) $\varphi_n \to w$ und $B[\varphi_n] \leq \text{const}$.

Für $|\alpha|=0$ gilt

$$\int_G p_o \tilde{g}_o(u) \varphi_n^2 \, dx \leq \|\varphi_n\|_\infty^2 \int_G p_o \tilde{g}_o(u) \, dx \leq \|w\|_\infty^2 \int_G p_o \tilde{g}_o(u) \, dx.$$

Dabei ist wegen $p_o g_o(u)u \in L^1(G)$ und G beschränkt auch $p_o \tilde{g}_o(u) \in L^1(G)$, denn es ist $p_o \tilde{g}_o(u) \leq p_o g_o(u)u +$ $+ p_o \max\{ \tilde{g}_o(t) ; |t| \leq 1 \}$ (man beachte $p_o \in L^1(G)$).

Für $1 \leq |\alpha| \leq m$ folgt wieder mit Lemma 9.16

$$\int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha \varphi_n)^2 \, dx \leq c'' \|u\|_{m,p}^{(p-2)/p} \|\varphi_n\|_{m,p}^{2/p} \leq \text{const},$$

da nach (6) $\|\varphi_n\|_{m,p} \leq \text{const}$ ist. Man hat also

$$\varphi_n \to w, \quad B_{u,p}[\varphi_n] \leq \text{const}$$

nachgewiesen, woraus mit Lemma 1.12 folgt, daß $C_o^\infty(G)$ ein core von $B_{u,p} | H_o^{m,p}(G) \cap L^\infty(G)$ ist. Da die Dichtheitsrelation transitiv ist, folgt aus Schritt 1 und 2 die Behauptung. QED

Der Zusammenhang zwischen den Existenzsätzen 5.1 und 6.6 und den Approximationslemmata 9.11, 9.14 und 9.19 wird in den beiden folgenden Korollaren hergestellt:

Korollar 9.20

Unter den Voraussetzungen von Satz 5.1 sei $u \in D(T+N)$ mit $F(u,\varphi) = (f,\varphi)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Zusätzlich seien die Voraussetzungen von Lemma 9.11 (oder 9.14 oder 9.19) erfüllt. Dann gilt $u \in D(B_{u,F})$ bzw. $u \in D(B_{u,p})$ und

$$B[u,v] + \sum_{|\alpha| \le m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha v \, dx = (f,v)$$

für alle $v \in D(B_{u,F})$ resp. $v \in D(B_{u,p})$, d.h. $B_{u,j}[u,v] = (f,v)$, $j=F,p$.

Beweis

Zunächst folgt aus $u \in D(T+N) \subset D(\widetilde{F})$, daß $u \in D(B_{u,F})$ bzw. $u \in D(B_{u,p})$ (unter den Voraussetzungen von Lemma 9.11 oder 9.14 bzw. 9.19). Dabei muß man im Falle von Lemma 9.19 berücksichtigen, daß für $|\alpha|=m$ $p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u \ge c \, |D^\alpha u|^p$ gilt, sodaß $u \in D(\widetilde{F})$ impliziert: $D^\alpha u \in L^p(G)$, $|\alpha|=m$.

Nach Satz 5.1 besteht die Gleichung

$$B[u,\varphi] + \sum_{|\alpha| \le m} \int_G p_\alpha \widetilde{g}_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u D^\alpha \varphi \, dx = (f,\varphi), \; \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Dies bedeutet aber

$$(1) \qquad B_{u,j}[u,\varphi] = (f,\varphi), \; \forall \varphi \in C_0^\infty(G), \; j=F \text{ oder } j=p.$$

Nun ist aber nach Lemma 9.11 (oder Lemma 9.14) $C_0^\infty(G)$ ein core von $B_{u,F}$, bzw. nach Lemma 9.19 ein core von $B_{u,p}$.

Daher überträgt sich die Gültigkeit von (1) auf alle $\varphi \in D(B_{u,j})$, j=F bzw. j=p. QED

Korollar 9.21

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.6 sei $u_r \in D(T+N)$ mit $F(u_r,\varphi) = \lambda_r(u_r,\varphi)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$, r>0. Weiter seien die Voraussetzungen der Lemmata 9.11 oder 9.14 bzw. 9.19 erfüllt. Dann gilt $u_r \in D(B_{u_r,F})$ bzw. $u_r \in D(B_{u_r,p})$ und

$$B[u_r,v] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_r) D^\alpha v \, dx = \lambda_r(u_r,v)$$

für alle $v \in D(B_{u_r,j})$, d.h. $B_{u_r,j}[u_r,v] = \lambda_r(u_r,v)$, j=F oder p.

Beweis: Wie bei Korollar 9.20.

Die Bilinearformen $B_{u,F}$ und $B_{u,p}$ (nach Def. 9.5 und Def. 9.18) sind dicht definiert, symmetrisch, halbbeschränkt und, nach Lemma 9.2, als Einschränkungen von B_u auch abschließbar. Daher ist der 1. Darstellungssatz anwendbar (Satz 1.20), der jeder Form $\widetilde{B_{u,F}}$ und $\widetilde{B_{u,p}}$ genau einen selbstadjungierten und halbbeschränkten Operator $T_{u,F}$ bzw. $T_{u,p}$ zuordnet:

Def. 9.22

Seien $\widetilde{F}$ nach Def. 2.2, $B_{u,F}$ bzw. $B_{u,p}$ nach Def. 9.5 bzw. 9.18, mit $u \in D(\widetilde{F})$. Dann bezeichne $T_{u,F}$ resp. $T_{u,p}$ den eindeutig bestimmten, selbstadjungierten und halbbeschränkten Operator, der die Form $\widetilde{B_{u,F}}$ resp. $\widetilde{B_{u,p}}$ gemäß Satz 1.20 darstellt.

Korollar 9.23

Unter den Voraussetzungen von Korollar 9.20 und mit $T_{u,F}$ bzw. $T_{u,p}$ nach Def. 9.22 gilt:

$$u \in D(T_{u,j}), \quad T_{u,j}u = f, \text{ mit } j=F \text{ bzw. } j=p.$$

Beweis

Nach Korollar 9.20 ist $u \in D(B_{u,F})$ resp. $u \in D(B_{u,p})$ und es gilt die Gleichung $B_{u,j}[u,v] = (f,v)$ für alle $v \in D(B_{u,j})$, $j=F$ oder $j=p$. Da $D(B_{u,j})$ ein core von $\widetilde{B_{u,j}}$ ist (trivialerweise), folgt die Behauptung aus Satz 1.20 iii) . QED

Korollar 9.24

Unter den Voraussetzungen von Korollar 9.21 und mit $T_{u_r,F}$ bzw. $T_{u_r,p}$ nach Def. 9.22 gilt:

$$u_r \in D(T_{u_r,j}), \quad T_{u_r,j}u_r = \lambda_r u_r, \text{ mit } j=F \text{ bzw. } j=p.$$

Beweis: Wie bei Korollar 9.23.

Satz 9.25

Es seien die Voraussetzungen wie in Korollar 9.20.

Sei $(f_n) \subset H$ mit $f_n \to 0$ und $(u_n) \subset D(T+N)$ mit $(T+N)(u_n) = f_n$ wie in Satz 5.1. Für $j=F$ oder $j=p$ seien die Operatoren $T_{u_n,j}$ wie in Def. 9.22. Es gilt:

$$T_{u_n,j} \xrightarrow{s} T, \; n \to \infty .$$

(Dabei steht '$\xrightarrow{s}$' für starke Resolventenkonvergenz).

Beweis

Nach Voraussetzung ist $B \geq c > 0$. Nach Lemma 4.3 gilt

$$(1) \qquad \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_n) D^\alpha u_n \, dx \leq -B[u_n] + (f_n, u_n) \leq$$
$$\leq \|f_n\| \cdot \|u_n\|, \text{ für alle } n.$$

Wegen der minimierenden Eigenschaften der u_n ist stets $S(u_n) - (f_n, u_n) \leq 0$ (vgl. Satz 5.1), sodaß

$0 \geq S(u_n) - (f_n, u_n) \geq \frac{1}{2}B[u_n] - (f_n, u_n) \geq \frac{1}{2}c\|u_n\|^2 - \|f_n\| \cdot \|u_n\| =$
$= \|u_n\| \cdot (\frac{1}{2}c\|u_n\| - \|f_n\|)$ folgt. Mit $f_n \to 0$ ergibt sich daher, daß auch $u_n \to 0$ gelten muß. In Verbindung mit (1) hat man also gezeigt:

$$(2) \qquad \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_n) D^\alpha u_n \, dx \to 0, \; n \to \infty .$$

Wegen $B[u_n] \leq (f_n, u_n)$ folgt aber auch $B[u_n] \to 0$ und, in Verbindung mit Lemma 1.23, $\|u_n\|_{m,2} \to 0$, also $D^\alpha u_{n_1} \xrightarrow[\text{p.p.}]{} 0$, für $|\alpha| \leq m$. Nun ist aber $0 \leq p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u_n) \leq$
$= p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u_n) D^\alpha u_n + p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u_n) \chi_{\{x \in G;\ |D^\alpha u_n(x)| \leq 1\}}$.

Wegen $D^\alpha u_{n_1} \to 0$ p.p. folgt nach Lebesgue

$$p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u_{n_1}) \cdot \chi_{\{x \in G;\ |D^\alpha u_{n_1}(x)| \leq 1\}} \to 0 \text{ in } L^1_{loc}.$$

In Verbindung mit (2) erhält man daher

$$(3) \qquad p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u_{n_1}) \to 0 \text{ in } L^1_{loc}(G), \; |\alpha| \leq m.$$

Da demnach jede Teilfolge von $(p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u_n))$ eine Teilfolge enthält, die in $L^1_{loc}(G)$ gegen 0 konvergiert, konvergiert bereits die Folge selbst in $L^1_{loc}(G)$ gegen 0. Daher gilt

$$\int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u_n)(D^\alpha \varphi)^2 \, dx \to 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(G), \ |\alpha| \leq m.$$

Weiter ist nach Voraussetzung $C_0^\infty(G)$ ein core von B und $C_0^\infty(G) \subset D(B_{u_n,j}) \subset D(B)$ nach Def. 9.1, 9.5 und 9.18, j=F oder j=p. Schließlich ist für $|\alpha| \leq m$ $p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u_n) \geq 0$ p.p.. Mithin ist $B_{u_n,j} \geq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 1.27 erfüllt, sodaß $T_{u_n,j} \overset{s}{\to} T$ folgt. QED

Satz 9.26

Es seien die Voraussetzungen von Korollar 9.21 erfüllt, $(r_n) \subset \mathbb{R}^+$ mit $r_n \to 0$ und u_n nach Satz 6.6 mit $\|u_n\| \leq r_n$, $S(u_n) = m(r_n)$ und $(T+N)(u_n) = \lambda_n u_n$. Für j=F oder j=p seien die Operatoren $T_{u_n,j}$ nach Def. 9.22 gebildet. Dann gilt:

$$T_{u_n,j} \overset{s}{\to} T, \ n \to \infty .$$

Beweis

Nach Lemma 4.3 ist $\sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_n) D^\alpha u_n \, dx \leq - B[u_n] \leq$

$\leq |\lambda_0| \, \|u_n\|^2 \leq |\lambda_0| \, r_n^2 \to 0, \ n \to \infty$. Dabei beachte man, daß wegen $S(u_n) \leq 0$ auch $B[u_n] \leq 0$ sein muß. Also gilt

(1) $u_n \to 0$, $B[u_n] \to 0$ und $\int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u_n) D^\alpha u_n \, dx \to 0$, $|\alpha| \leq m$.

Wieder folgt mit Lemma 1.23 $\|u_n\|_{m,2} \to 0$, also auch

(2) $$D^\alpha u_{n_1} \xrightarrow[\text{p.p.}]{} 0, \ |\alpha| \leq m.$$

Wie im Beweis zu Korollar 9.25 zeigt man nun $p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u_n) \to 0$ in $L^1_{loc}(G)$. Die Behauptung folgt dann wie oben aus Satz 1.27. QED

§10 Über die Eindeutigkeit der minimierenden Funktion u_r

In diesem letzten Abschnitt soll mit Hilfe der in §9 bereitgestellten Mittel untersucht werden, unter welchen zusätzlichen Bedingungen die minimierenden Funktionen u_r (d.h. $S(u_r) = m(r)$, $\|u_r\| \leq r$, vgl. Lemma 6.2) für kleine Normierungen r eindeutig bestimmt sind. In Verbindung mit den Ergebnissen von §8 erlaubt diese Eindeutigkeitsaussage den Schluß, daß es einen stetigen, bei λ_o entspringenden Zweig von Eigenlösungen des Operators T+N gibt.

Grundvoraussetzung ist dabei stets, daß λ_o, der tiefste Eigenwert des linearen Operators T, nicht entartet ist. Diese Bedingung würde es bei einfacheren Nichtlinearitäten gestatten, die Leray-Schauder-Theorie anzuwenden (vgl. die Einführung zu §6).

Der Beweis läßt sich in folgende Schritte gliedern:

1.) Nimmt man an, es gäbe zu festem $0<r<r_o$ zwei minimierende Lösungen u und v, $u \neq v$, so kann man (mit §9) die Formen $B_{u,j}$, $B_{v,j}$ und die zugehörigen Operatoren $T_{u,j}$, $T_{v,j}$ betrachten (j=F oder j=p). Man erhält nach Korollar 9.24

$$T_{u,j}u = \lambda(u)u, \text{ bzw. } T_{v,j}v = \lambda(v)v.$$

2.) Nach Satz 7.9 b) liegen die Zahlen $\lambda(u)$ und $\lambda(v)$ für kleines r unterhalb von λ_1, dem 2. Eigenwert von T. Da die (wiederholten) Eigenwerte der Operatoren $T_{u,j}$ bzw. $T_{v,j}$ stets größer oder gleich den (wiederholten) Eigenwerten von T sind (nach dem Minimax-Prinzip), muß $\lambda(u)$ der tiefste Eigenwert von $T_{u,j}$ und $\lambda(v)$ der tiefste Eigenwert von $T_{v,j}$ sein; außerdem sind beide Eigenwerte einfach. Es folgt

3.) $$B_{u,j}[u] = \lambda(u)\|u\|^2, \quad B_{v,j}[v] = \lambda(v)\|v\|^2, \text{ aber}$$

$$B_{u,j}[v] > \lambda(u)\|v\|^2, \quad B_{v,j}[u] > \lambda(v)\|u\|^2.$$

Dies kann dann relativ leicht zum Widerspruch geführt werden, falls die g_α der Bedingung (H.6) genügen.

Verschiedene Autoren haben Eindeutigkeitsfragen bei nichtlinearen Gleichungen unter Verwendung von linearen Operatoren mit 'nichtlinearen' Potentialen q(u) behandelt. Während im 2. Schritt ähnlich wie bei Bazley und Zwahlen [3] argumentiert wird, bestehen beim 3. Parallelen zu Lieb [44]; dieser Artikel gab den entscheidenden Anstoß für den hier vorgestellten Beweis. Jedoch ist der Rahmen bei den beiden genannten Arbeiten ein anderer: Bazley und Zwahlen setzen bereits eine Verzweigungsanalyse nach Leray-Schauder voraus und stellen im übrigen erheblich stärkere Bedingungen an die Nichtlinearitäten (Homogenität zum Beispiel). Lieb wiederum behandelt eine äußerst spezielle Nichtlinearität mit starken Symmetrieeigenschaften (aus der Hartree-Fock-Theorie) und ohne Beziehung zu einem Verzweigungsproblem. Zum Teil verwandte Argumente finden sich auch bei Hess [31], der ein Randwertproblem untersucht. Die genannten Arbeiten sind sämtlich auf den Fall m=1 beschränkt (Eindeutigkeit positiver Lösungen).

Im Falle konvexer Funktionale ist es vergleichsweise leicht, Eindeutigkeit zu beweisen (vgl. z. Bp. McKenna [48]). Jedoch ist hier S nicht konvex, und schon im linearen Fall ist der Nachweis, daß der tiefste Eigenwert elliptischer Differentialoperatoren nicht entartet ist, relativ schwierig (vgl. hierzu Faris [20], p. 64-74, und Goelden [24]).

Satz 10.1

Seien G, H und B wie in (H.1), jedoch mit $D(B) = H_o^{m,2}(G)$. Der zu B gehörige selbstadjungierte und halbbeschränkte Operator habe folgende Eigenschaften: $\sigma_{ess}(T) \subset [0, \infty)$, $\lambda_o := \inf \sigma(T)$ sei ein negativer, isolierter Punkt von $\sigma(T)$ und nicht entartet (d.h. Eigenwert der Vielfachheit 1). Für $|\alpha| \leq m$ seien p_α, g_α und G_α gegeben, die den Bedingungen (H.2) - (H.4) und (H.6) genügen; für $|\alpha| = m$ seien die G_α konvex. Weiter gelte

a) G sternförmig, g_α erfüllen (H.5), $0 < a \leq p_\alpha \leq b$.

oder

b) G beschränkt mit Segmenteigenschaft, die g_α erfüllen (H.5) und $g_\alpha(t)t \leq c\, g_\beta(t)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, für $\beta < \alpha$. $0 < a \leq p_\alpha \leq b$.

oder

c) G beschränkt und mit Segmenteigenschaft. $p_o \in L^1(G)$, mit einem $p \geq 2$ gelte für $|\alpha| = m$: $c_1|t|^p \leq g_\alpha(t)t \leq c_2|t|^p$, $0 < a \leq p_\alpha \leq b$, während für $0 < |\alpha| < m$ $g_\alpha(t)t \leq C|t|^p$ sei und $0 \leq p_\alpha \leq b$.

Schließlich sei S wie in Def. 2.4.

Dann existiert ein $r_o > 0$ derart, daß für alle $0 < r < r_o$ gilt: Es gibt genau ein $u_r \in D(S)$ mit $S(u_r) = m(r)$ und $\|u_r\| \leq r$ ($m(r) = \inf \{ S(u) ; u \in D(S), \|u\| \leq r \}$).

Beweis

Seien λ_i, i=0,1,2,... die nach Satz 1.28 (minimax-Prinzip) zu T konstruierten Zahlen. Da λ_0 nach Voraussetzung nicht entartet sein soll, gilt

(1) $$\delta := \lambda_1 - \lambda_0 > 0.$$

Zu r>0 und $u \in D(S)$ mit $S(u) = m(r)$ und $\|u\| \leq r$ gibt es nach Lemma 6.5 eine reelle Zahl $\lambda(u)$, so daß

(2) $$F(u,\varphi) = \lambda(u)(u,\varphi), \forall \varphi \in C_0^\infty(G)$$

gilt; außerdem ist $u \in D(\tilde{F})$ (F und $\tilde{F}$ nach Def. 2.2 und 2.3). Wegen (2) gilt sogar $u \in D(T+N)$, sodaß mit Satz 7.9 b) folgt: Zu δ (nach (1)) gibt es ein $r_\delta > 0$ mit $|\lambda(u) - \lambda_0| < \delta$ falls $0<r<r_\delta$, also auch

(3) $$\lambda(u) < \lambda_1, \text{ für } 0<r<r_\delta.$$

Weiter kann man nach Korollar 7.5 a) ein $r_0 \in (0,r_\delta)$ finden mit: Falls $0<r<r_0$ und $S(u)=m(r)$, $\|u\| \leq r$, folgt $\|u\|=r$.

Sei nun ein $r \in (0,r_0)$ fest gewählt.

Annahme: Es gibt $u,v \in D(S)$, $u \neq v$, $\|v\| \leq r$, $\|u\| \leq r$, so, daß $S(u) = S(v) = m(r)$ ist.

Nach dem Obigen gilt dann:

(4) $$\begin{cases} \|u\| = \|v\| = r, \; u,v \in D(T+N), \\ F(u,\varphi) = \lambda(u)(u,\varphi), \quad F(v,\varphi) = \lambda(v)(v,\varphi), \forall \varphi \in C_0^\infty(G), \\ \text{mit } \lambda(u) < \lambda_1 \text{ und } \lambda(v) < \lambda_1. \end{cases}$$

Seien nun unter den Voraussetzungen a) oder b) $B_{u,F}$ und $B_{v,F}$ nach Def. 9.5 und unter den Voraussetzungen c) $B_{u,p}$ und $B_{v,p}$ nach Def. 9.18 erklärt. Im Weiteren wird nur noch $B_{u,j}$ und $B_{v,j}$ geschrieben mit der Konvention, daß unter Vorauss. a) oder b) j=F und unter Vorauss. c) j=p sein soll. Wegen $u,v \in D(\widetilde{F})$ gilt auch

(5) $\qquad u,v \in D(B_{u,j})$, bzw. $u,v \in D(B_{v,j})$, j=F oder j=p.

Dies ergibt sich im Falle von Vorauss. a) oder b) aus (H.4), da $\int p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha w)^2\, dx \le c \int p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u\, dx +$ $+ c \int p_\alpha g_\alpha (D^\alpha w) D^\alpha w\, dx$ ist, mithin $u,v \in D(B_u)$ und $u,v \in D(B_v)$, B_u und B_v nach Def. 9.1. Im Falle von Vorauss. c) gilt $g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u \in L^1(G)$ für $|\alpha|=m$, also $D^\alpha u \in L^p(G)$ für $|\alpha|=m$ (entsprechend für v) .

Mit Korollar 9.21 folgt aus (4) und (5)

(6) $\quad B_{u,j}[u] = \lambda(u)r^2, \quad B_{v,j}[v] = \lambda(v)r^2.$

Definiert man zu den Formen $B_{u,j}$ und $B_{v,j}$ die darstellenden Operatoren $T_{u,j}$ und $T_{v,j}$ nach Def. 9.22, so folgt mit Korollar 9.24 aus (4) und (5): $u \in D(T_{u,j})$, $v \in D(T_{v,j})$ und

(7) $\quad T_{u,j}u = \lambda(u)u, \qquad T_{v,j}v = \lambda(v)v.$

Seien $\lambda_o(u)$, $\lambda_1(u)$,..., bzw. $\lambda_o(v)$, $\lambda_1(v)$,... die nach Satz 1.28 (minimax-Prinzip) zu den Operatoren $T_{u,j}$ bzw. $T_{v,j}$ konstruierten Zahlen (eigentlich $\lambda_o(u) = \lambda_o(u,j)$).

Nach dem Korollar zum Minimax-Prinzip (Korollar 1.29)

gilt dann wegen $p_\alpha \tilde{g}_\alpha(.) \geq 0$: $\sigma_{ess}(T_{u,j}) \cup \sigma_{ess}(T_{v,j}) \subset [0, \infty)$,

(8) $\lambda_i(u) \geq \lambda_i$ und $\lambda_i(v) \geq \lambda_i$, $i=0,1,\ldots$

Folglich gilt $\lambda_i(u) \geq \lambda_1$ und $\lambda_i(v) \geq \lambda_1$ für alle $i \geq 1$.

Aus (3) und (7) ergibt sich daher

(9) $\lambda(u) = \lambda_o(u)$ und $\lambda(v) = \lambda_o(v)$.

Also ist $\inf \sigma(T_{u,j}) = \lambda(u)$ und $\inf \sigma(T_{v,j}) = \lambda(v)$, mithin nach Lemma 1.21

(10) $B_{u,j} \geq \lambda(u)$, $B_{v,j} \geq \lambda(v)$.

Da außerdem $\lambda(u)$ und $\lambda(v)$ isolierte Eigenwerte mit 1-dimensionalem Eigenraum sind, folgt aus (6) und Lemma 1.30

(11) $$\begin{aligned} B_{u,j}[u] &= \lambda(u)r^2, \quad B_{v,j}[v] = \lambda(v)r^2 \\ B_{u,j}[v] &> \lambda(u)r^2, \quad B_{v,j}[u] > \lambda(v)r^2. \end{aligned}$$

folglich

(12) $B_{u,j}[v] > B_{u,j}[u]$, $B_{v,j}[u] > B_{v,j}[v]$,

woraus durch Addition der Ungleichungen folgt:

(13) $B_{u,j}[v] + B_{v,j}[u] > B_{u,j}[u] + B_{v,j}[v]$.

Nach der Definition von $B_{u,j}$ heißt das ausgeschrieben:

$$B[v] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha u)(D^\alpha v)^2 dx + B[u] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha (D^\alpha v) \cdot (D^\alpha u)^2 \, dx >$$

$$> B[u] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) D^\alpha u \, dx + B[v] + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha (D^\alpha v) D^\alpha v \, dx.$$

Also

$$(14)\quad \sum_{|\alpha|\le m} \int_G p_\alpha \left(\tilde{g}_\alpha(D^\alpha u)(D^\alpha v)^2 + \tilde{g}_\alpha(D^\alpha v)(D^\alpha u)^2 \right) dx >$$

$$> \sum_{|\alpha|\le m} \int_G p_\alpha \left(\tilde{g}_\alpha(D^\alpha u)(D^\alpha u)^2 + \tilde{g}_\alpha(D^\alpha v)(D^\alpha v)^2 \right) dx,$$

oder

$$0 > \sum_{|\alpha|\le m} \int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u)\left((D^\alpha u)^2 - (D^\alpha v)^2 \right) dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\le m} \int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha v)\left((D^\alpha v)^2 - (D^\alpha u)^2 \right) dx,$$

mithin

$$(15)\quad 0 > \sum_{|\alpha|\le m} \int_G p_\alpha \left(\tilde{g}_\alpha(D^\alpha u) - \tilde{g}_\alpha(D^\alpha v) \right) \cdot \left((D^\alpha u)^2 - (D^\alpha v)^2 \right) dx.$$

Dies führt nun rasch zum Widerspruch, da die g_α der Bedingung (H.6) genügen: Falls nämlich für ein festes $x \in G$ und $|\alpha| \le m$ $|D^\alpha u(x)| \le |D^\alpha v(x)|$ ist, so folgt mit (H.6) auch $\tilde{g}_\alpha(D^\alpha u(x)) - \tilde{g}_\alpha(D^\alpha v(x)) \le 0$ und somit

$$(16)\quad \left(\tilde{g}_\alpha(D^\alpha u(x)) - \tilde{g}_\alpha(D^\alpha v(x)) \right) \left((D^\alpha u(x))^2 - (D^\alpha v(x))^2 \right) \ge 0.$$

Ist umgekehrt $|D^\alpha u(x)| \ge |D^\alpha v(x)|$, so gilt nach (H.6) auch $\tilde{g}_\alpha(D^\alpha u(x)) - \tilde{g}_\alpha(D^\alpha v(x)) \ge 0$, sodaß wieder (16) folgt.

Also sind alle Integranden in (15) ≥ 0 p.p. und somit muß die rechte Seite von (15) nichtnegativ sein, also Widerspruch. Damit ist die Eindeutigkeitsaussage bewiesen.

Die Existenz einer minimierenden Lösung ist durch Lemma 6.2 gesichert. QED

Korollar 10.2

Es seien die Voraussetzungen von Satz 10.1 erfüllt und T+N wie in Def. 2.5. Dann besitzt T+N einen stetigen, bei λ_o entspringenden Zweig von Eigenlösungen, d.h. genauer: Es gibt ein $r'>0$ und eine stetige Abbildung $Q: [0,r') \to \mathbb{R} \times H_o^{m,2}(G)$ derart, daß für jedes $0 \leq r < r'$ und $(\lambda(r), u(r)) = Q(r)$ gilt: $u(r) \in D(T+N)$, $(T+N)(u(r)) = \lambda(r)u(r)$; dabei ist $\lim_{r \to 0} Q(r) = (\lambda_o, 0)$.

Beweis

Nach Satz 10.1 gibt es ein $r_o>0$ und zu jedem $0<r<r_o$ genau ein $u_r \in D(S)$, das den Bedingungen von Lemma 6.5 genügt. Also liegen diese u_r in $D(T+N)$ und es gibt Zahlen $\lambda_r \in \mathbb{R}$ mit $(T+N)(u_r) = \lambda_r u_r$. Durch eventuelle Verkleinerung von r_o zu r' kann man nach Lemma 7.9 b) annehmen, daß $\lambda_r \in (\lambda_o - 1, 0)$ gilt für $0<r<r'$. Nun folgt die Behauptung aus Korollar 8.5. QED

Anhang

§ 11 Bemerkungen zu § 2

In diesem Paragraphen sollen einige Bemerkungen zur Definition von T+N verdeutlichen, daß die in §2 angesprochene Analogie zum 1. Darstellungssatz nicht nur formal, sondern auch inhaltlich besteht. Dazu sei zunächst von den Voraussetzungen die Rede: Die Funktionale S und $\widetilde{F}$ sind dicht definiert und halbbeschränkt, jedoch nicht unbedingt abgeschlossen. Wie aus §1 hervorgeht, hat die Abschließung im linearen Fall vor allem den Zweck, die Form auf einen 'hinreichend großen' Definitionsbereich fortsetzen zu können. Hier stellt sich aber heraus, daß $D(\widetilde{F}) \cap D(S)$ bereits groß genug ist, in dem Sinne, daß $D(T+N) \subset D(S) \cap D(\widetilde{F})$ gilt und gleichzeitig T+N surjektiv ist. Wollte man auch hier die Abschließbarkeit von S und $\widetilde{F}$ beweisen, so müßte man wohl Monotonieeigenschaften der g_α voraussetzen. Was schließlich 'Symmetrie' bei S oder $\widetilde{F}$ bedeuten kann, wird im Zusammenhang mit der 'Symmetrie' von T+N diskutiert werden. Daß hier von zwei verschiedenen Funktionalen gesprochen werden muß, ist ein natürlicher Effekt der Nichtlinearitäten.

In der Behauptung von Satz 2.1 ist T halbbeschränkt und selbstadjungiert; während die Halbbeschränktheit von T+N aus der von $\widetilde{F}$ folgt, gibt es zur Selbstadjungiertheit

zunächst kein nichtlineares Gegenstück. Daher soll die Selbstadjungiertheit äquivalent ausgedrückt werden:

Lemma 11.1

Sei T ein formalsymmetrischer Operator im Hilbertraum H, $T \geq 1$, T surjektiv. Dann ist T selbstadjungiert.

Beweis

T ist dann auch dicht definiert. Sei nämlich $w \in H$ mit $(w,u) = 0$ für alle $u \in D(T)$. Da T surjektiv ist, gibt es ein $v \in D(T)$ mit $Tv = w$, also gilt $(Tv,u) = 0$ für alle $u \in D(T)$. Da T formalsymmetrisch ist, folgt $(v,Tu) = 0, \forall u \in D(T)$, was wegen der Surjektivität von T $v=0$ zu Folge hat, sodaß $w = Tv = 0$ ist.

Also ist T symmetrisch, ≥ 1 und surjektiv, mithin selbstadjungiert. QED

Nun muß noch eine nichtlineare Formulierung für die formale Symmetrie gefunden werden; dies gelingt so:

T ist formalsymmetrisch $\iff$ für alle $u,v \in D(T)$ gilt:

$$(1) \qquad 2(Tu,v) = \lim_{t \to 0} t^{-1}\Big((T(u+tv),u+tv) - (Tu,u)\Big),$$

B ist symmetrisch $\iff$ für alle $u,v \in D(B)$ gilt:

$$(2) \qquad 2B[u,v] = \lim_{t \to 0} t^{-1}(B[u+tv] - B[u]).$$

Der Beweis ist trivial. Man kann diese Aussage auch so formulieren: Ein linearer Operator ist genau dann formalsymmetrisch, wenn er ein Potential besitzt.

Also läßt sich Satz 2.1 in folgender Form aussprechen:

Satz 11.2

Sei B eine halbbeschränkte, dicht definierte und abgeschlossene Bilinearform mit Potential $\frac{1}{2}$ B (nach (2)).

Sei $D(T) := \{ u \in D(B) ; \exists f \in H$ mit $B[u,v] = (f,v)$ für alle v aus einem core von $B \}$

und $Tu := f$ für $u \in D(T)$. Dann ist T surjektiv und es gilt

$$2(Tu,v) = \lim_{t \to 0} t^{-1}\big(B[u+tv] - B[u] \big), \text{ für alle } v \in D(B).$$

In dieser Version dürfte die Analogie zwischen linearem und nichtlinearem Fall etwas deutlicher werden; insbesondere wird klar, weshalb es sinnvoll ist, in Def. 2.5 $D(T+N) \subset D(\widetilde{F}) \cap D(S)$ zu fordern, obwohl es für die Definition eines Operators T+N ja schon ausreichte, $D(T+N) \subset \{ u \in D(B) ; p_\alpha g_\alpha (D^\alpha u) \in L^1_{loc}(G) \}$ zu verlangen. Freilich soll nicht verschwiegen werden, daß es nicht gelungen ist, nachzuweisen, daß man (T+N)(u) als Richtungsableitung von S auffassen kann; dies ist nach Lemma 4.4 allenfalls für diejenigen $u \in D(T+N)$ richtig, die das Funktional $S(.) - (f,.)$ minimieren. Zwar wäre nach Satz 5.1 auch die Einschränkung von T+N auf solche minimierende u noch surjektiv, doch könnte es geschehen, daß dann die Definitionsbereiche von $T+N+c_1$ und $T+N+c_2$ für $c_1 \neq c_2$ verschieden ausfallen; daher wurde dieser Weg hier nicht weiter verfolgt.

§ 12 Ergänzungen zu § 4

Dieser Paragraph soll einige Hinweise auf naheliegende Verallgemeinerungen in den §§ 2-6 geben. Dazu sei $D^k u$ das s_k-Tupel der $D^\alpha u$ mit $|\alpha|=k$ und $s := \sum_{k=0}^{m} s_k$. Die Abbildung $M : G \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ (G beschränkt) genüge der Bedingung

(M1) $M(x,\xi)$ sei stetig differenzierbar in ξ für fast alle $x \in G$ und meßbar in x für alle $\xi \in \mathbb{R}^s$.

Dann sei $A_\alpha(x,\xi) := \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} M(x,\xi)$.

1.) Zunächst kann man die Überlegungen der §§ 2-5 leicht auf den Fall übertragen, daß die Bilinearform B durch einen quasilinearen Hauptteil in $H_o^{m,p}(G)$, $1<p<\infty$, ersetzt ist (mit rechter Seite $f \in W^{-m,p}(G)$ in § 5), der wie üblich definiert ist:

Seien M und A_α wie oben; zusätzlich zu (M1) gelte:

(M2)
(i) $M(x,u) := M(x,u,D^1u,\ldots,D^mu) \in L^1(G)$ für alle $u \in H_o^{m,p}(G)$.

(ii) $M(x,\eta,\zeta)$ sei konvex in ζ und $M(x,\eta,\zeta) \geq |\zeta|^p$; dabei stehe ζ für den Vektor der D^m-Ableitungen.

(iii) $|A_\alpha(x,\xi)| \leq c \cdot |\xi|^{p-1}$, $\forall x \in G$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^s$.

(M3) $M(.,u,D^1u,\ldots,D^mu)$ sei konvex in D^mu.

Unter diesen Voraussetzungen folgt die schwache untere Halbstetigkeit des Funktionals $\int_G M(x,u)\,dx$ mittels Theorem 1.9.1 in Morrey [49]. Wegen der Voraussetzung (M2)(iii) gibt es bei der Differentiation

$$\lim_{t \to 0+} t^{-1} \int_G (M(x,u+t(\varphi-au)) - M(x,u))\,dx$$

keine Schwierigkeiten.

2.) Landes betrachtet in [40] den Fall eines (möglicherweise streng nichtlinearen) $M(x,\xi)$, das als konvex (in $\xi \in \mathbb{R}^s$) vorausgesetzt wird. Solche Stammfunktionen können mit den hier vorgeschlagenen Methoden recht einfach behandelt werden:

Seien wieder M und A_α wie oben; zusätzlich zu (M1) gelte:

(M4)

(i) $M(x,\xi)$ ist konvex in $\xi \in \mathbb{R}^s$.

(ii) $M(.,\varphi) \in L^1(G)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

(iii) $M(x,\eta,\zeta) \geq p(|\zeta|)\cdot|\zeta|$ mit einer strikt wachsenden Funktion $p: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $p(0) = 0$, $p(r) \to \infty$ für $r \to \infty$; mit ζ sei dabei der Vektor der D^m-Ableitungen bezeichnet.

(iv) $A_\alpha(x,\xi)\cdot\xi_\alpha \geq 0$.

Wieder erhält man die schwache untere Halbstetigkeit des Integralfunktionals aus Theorem 1.9.1 in Morrey [49]. Da M konvex ist, kann man für jedes minimierende u und $\lambda \in (0,1)$

$M(x,\lambda u) \leq M(x,u) + M(x,0)$ ausnützen und (vgl. Lemma 4.3)

aus $\overline{\lim_{h \to 0}} \int_G h^{-1}(M(.,u) - M(.,(1-h)u))\, dx \leq \text{const}$ auf

$A_\alpha(x,u)D^\alpha u \in L^1(G)$ schließen ($A_\alpha(x,u) := A_\alpha(x,u,D^1u,\ldots,D^mu)$).

Sei nun $\varphi \in C_o^\infty(G)$. Dann folgt (für $0<t<1$, $0<a<\frac{1}{2}$) aus der

Konvexität von M:

$$(1) \quad M(x,u+t(\varphi-au)) \leq (1-at)M(x,u) + tM(x,a^{-1}\varphi),$$

denn es ist $(1-at) + at = 1$. Wegen $M(.,a^{-1}\varphi) \in L^1(G)$ ist also

auch $M(.,u+t(\varphi-au)) \in L^1(G)$.

Schließlich kann man auch das Differentiationslemma 4.4

leicht übertragen: Wie in § 4 geht man aus von

$$(2) \quad t^{-1} \int_G (M(x,u) - M(x,u+t(\varphi-au)))\, dx \leq c(t),$$

wobei mit $c(t)$ die rechte Seite von Formel (1) im Beweis

zu Lemma 4.4 abgekürzt sei. Definiert man nun die Mengen

$G_1 := \{ x \in G ; a|M(x,u)| < |M(x,a^{-1}\varphi)| \}$, $G_2 := G \setminus G_1$,

$G_{1t} := \{ x \in G ; M(x,u) - M(x,u+t(\varphi-au)) < 0 \}$ und

$G_{2t} := G \setminus G_{1t}$, so ergibt sich zunächst mit (1), daß für

alle $t \in (0,1)$ $G_2 \subset G_{2t}$ gilt, mithin $G_{1t} \subset G_1$.

Analog zu Formel (2) im Beweis von Lemma 4.4 schreibt man

nun (2) als

$$(3) \quad \int_G t^{-1}\big(M(x,u) - M(x,u+t(\varphi-au))\big)\cdot \chi_{G_{2t}}\, dx \leq c(t) -$$

$$- \int_G t^{-1}\big(M(x,u) - M(x,u+t(\varphi-au))\big)\cdot \chi_{G_{1t}}\, dx.$$

Nach dem Mittelwertsatz konvergiert

$t^{-1}\big(M(x,u) - M(x,u+t(\varphi-au))\big) \to A_\alpha(x,u)(D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)$, p.p.;

daher konvergieren auch die Integranden in (3) insgesamt (p.p.), denn an den Stellen $x \in G$, wo $\chi_{G_{1t}}(x)$ nicht konvergiert (mit $t \to 0+$), muß notwendigerweise

$t^{-1}\big(M(x,u) - M(x,u+t(\varphi-au))\big) \to 0$ gelten.

Nun kann man für die rechte Seite von (3) wegen $G_{1t} \subset G_1$ folgende Abschätzung angeben:

$$0 \geq t^{-1}\big(M(x,u) - M(x,u+t(\varphi-au))\big)\cdot\chi_{G_{1t}} \geq^{(1)}$$

$$\geq t^{-1}(-tM(x,a^{-1}\varphi) + atM(x,u)) = -M(x,a^{-1}\varphi) + aM(x,u) \in L^1(G)$$

(vgl. Formel (9) im Beweis zu Lemma 4.4). Mithin konvergiert die rechte Seite von (3) nach Lebesgue; anschließend kann man auf die linke Seite von (3) das Lemma von Fatou anwenden. Die übrigen Details sind mit dem Beweis von Lemma 4.4 identisch.

3.) Schließlich kann man, ausgehend von den $p_\alpha g_\alpha(.)$-Nichtlinearitäten, zu komplizierteren Gebilden übergehen, etwa $p_\beta(1+(D^\alpha u)^2)G_\beta(D^\beta u)$, mit p_β, g_β und G_β wie in (H.2), für $|\alpha| \leq m$ und $|\beta| < m$. Die schwache untere Halbstetigkeit von

$$S(u) := \frac{1}{2}B[u] + \sum_{|\alpha|\leq m,|\beta|<m} \int_G p_\beta(1+(D^\alpha u)^2)G_\beta(D^\beta u)\,dx$$

folgt wieder im wesentlichen mit Th. 1.9.1 in Morrey [49].

Falls $S(u) < \infty$ ist, so folgt für $0<t<1$ und $0<a<\frac{1}{2}$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$: $S(u+t(\varphi-au)) < \infty$, denn es ist $1+(D^\alpha u+t(D^\alpha\varphi-aD^\alpha u))^2 \leq$ $\leq 1+2(D^\alpha u)^2 + 2(D^\alpha\varphi)^2$ und $p_\beta G_\beta(D^\beta u) \in L^1(G)$ bzw. $p_\beta(1+(D^\alpha u)^2)G_\beta(D^\beta u) \in L^1(G)$.

Lemma 4.3 läßt sich wortwörtlich übertragen, und man erhält $p_\beta 2(D^\alpha u)^2 G_\beta(D^\beta u) + p_\beta(1+(D^\alpha u)^2)g_\beta(D^\beta u)D^\beta u \in L^1(G)$. Wegen der Vorzeichenbedingung muß also jeder der Terme in $L^1(G)$ liegen. Somit bleibt noch Lemma 4.4 zu betrachten: Definiert man die Gebiete $G_{1\beta}$, $G_{2\beta}$ wie im Beweis von Lemma 4.4, so kann man die Integrale über $G_{1\beta}$ wieder nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue behandeln (vgl. (10) im Bew. zu Lemma 4.4). Dann tritt allerdings eine kleine Schwierigkeit auf, weil die Integranden auf $G_{2\beta}$ nicht notwendig ≥ 0 sind. Nun gilt aber auf $G_{2\beta}$ die Relation

$$G_\beta(D^\beta u) \geq G_\beta(D^\beta u+t(D^\beta\varphi-aD^\beta u)).$$

Wegen $1+(D^\alpha u)^2-(1+(D^\alpha u+t(D^\alpha\varphi-aD^\alpha u))^2) =$

$- 2t\, D^\alpha u(D^\alpha\varphi-aD^\alpha u) - t^2(D^\alpha\varphi - aD^\alpha u)^2 \geq -c_1 t((D^\alpha\varphi)^2+(D^\alpha u)^2)$,

kann man die Integranden auf $G_{2\beta}$ durch

$$-c_1 p_\beta((D^\alpha\varphi)^2+(D^\alpha u)^2) G_\beta(D^\beta u) \in L^1(G)$$

nach unten abschätzen (dies entspricht (5) im Bew. von Lemma 4.4), was natürlich zur Anwendung des Lemmas von Fatou ausreicht.

Literaturverzeichnis

[1] Adams, R.A.: Sobolev Spaces. New York, Academic Press 1975

[2] Amann,H., Crandall,M.G.: On Some Existence Theorems for Semilinear Elliptic Equations. Indiana Univ. Math. J. 27, 779-790 (1978)

[3] Bazley,N.,Zwahlen,B.: A Branch of Positive Solutions of Nonlinear Eigenvalue Problems. Manuscripta Math. 2, 365-374 (1970)

[4] Berestycki,H., Lions,P.-L.: Existence d'ondes solitaires dans des problèmes du type Klein-Gordon. C.r.Acad.Sci. Paris Ser.A-B 287, 503-506 (1978)

[5] Berger,J.: Strongly Nonlinear Operators of Hammerstein Type. J. London Math. Soc. (2)15, 277-287 (1977)

[6] Berger, M.S.: On Nonlinear Perturbations of the Eigenvalues of a Compact Selfadjoint Operator. Bull. Amer. Math. Soc. 73, 704-708 (1967)

[7] - " - : Global Analysis of Specific Nonlinear Eigenvalue Problems. Rocky Mountain J. Math. 3, 320-354 (1973)

[8] - " - : Nonlinearity and Functional Analysis. New York, Academic Press 1977

[9] Berger, M.S., Schechter, M.: Embedding Theorems and Quasilinear Elliptic Boundary Value Problems for Unbounded Domains. Trans. Amer. Math. Soc. 172, 261-278 (1972)

[10] Böhme, R.: Nichtlineare Störungen der isolierten Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren. Math. Z. 123, 61-92 (1971)

[11] Brézis, H.: Quelques propriétés des opérateurs monotones et des semi-groupes non linéaires. Nonlin. Oper. Calc. Var., Summer Sch. Bruxelles 1975, Lect. Notes Math. 543, 56-82, Springer 1976

[12] Brézis, H., Browder, F.: Strongly Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 5, 587-603 (1978)

[13] Brézis, H., Gallouet, T.: Nonlinear Schrödinger Evolution Equations. Nonlinear Anal. 4, 677-681 (1980)

[14] Brézis, H., Nirenberg, L.: Characterizations of the Ranges of Some Nonlinear Operators and Applications to Boundary Value Problems. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 5, 225-326 (1978)

[15] Browder, F.: Variational Methods for Nonlinear Elliptic Eigenvalue Problems. Bull. Amer. Math. Soc. 71, 176-183 (1965)

[16] - " - : Existence Theory for Boundary Value Problems for Quasilinear Elliptic Systems with Strongly Nonlinear Lower Order Terms. Partial Diff. Equ., (Proc. Sympos. Pure Math. 23, Univ. California, Berkeley 1971), 269-286. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973

[17] Clement, P.: Positive Eigenfunctions for a Class of Second Order Elliptic Equations with Strong Nonlinearities. Comm. Partial Differential Equations 2, 615-625 (1977)

[18] Conjura, E., Petryshin, W.V.: Extension of Nonlinear Densely Defined Operators, Rates of Convergence for the Error and the Residual, and Applications to Differential Equations. J. Math. Anal. Appl. 64, 651-694 (1978)

[19] Dunford, N. Schwartz, J.T.: Linear Operators, I. New York, Interscience 1967

[20] Faris, W.G.: Selfadjoint Operators. Lect. Notes Math. 433, Berlin (etc), Springer 1975

[21] de Figueiredo, D.G., Gossez, J.-P.: Nonlinear Perturbations of a Linear Elliptic Problem Near its First Eigenvalue. J. Differential Equations 30, 1-19 (1978)

[22] Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin (etc.), Springer 1977

[23] Ginibre, J., Velo, G.: On a Class of Nonlinear Schrödinger Equations. J. Funct. Anal. 32, 1-32 (1979)

[24] Goelden, H.-W.: On Non-Degeneracy of the Ground State of Schrödinger Operators. Math. Z. 155, 239-247 (1977)

[25] Gossez, J.-P.: Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems for Equations with Rapidly (or Slowly) Increasing Coefficients. Trans. Amer. Math. Soc. 190, 163-205 (1974)

[26] - " - :Surjectivity Results for Pseudo-Monotone Mappings in Complementary Systems. J. Math. Anal. Appl. 53, 484-494 (1976)

[27] Gustafson, K., Sather, D.: Large Nonlinearities and Monotonicity. Arch. Rational Mech. Anal. 48, 109-122 (1972)

[28] - " - : Large Nonlinearities and Closed Linear Operators. Arch. Rational Mech. Anal. 52, 10-19 (1973)

[29] Hedberg, L.I.: Two Approximation Problems in Function Spaces. Ark. Mat. 16, 51-81 (1978)

[30] Hess, P.: On the Solvability of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Indiana Univ. Math. J. 25, 461-466 (1976)

[31] Hess, P.: On Uniqueness of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Math. Z. 154, 17-18 (1977)

[32] Hess, P., Ruf, B.: On a Superlinear Elliptic Boundary Value Problem. Math. Z. 164, 9-14 (1978)

[33] Hewitt, E., Stromberg, K.: Real and Abstract Analysis. Berlin (etc.), Springer 1965

[34] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators. New York, Springer, 1966

[35] Kibble, T.W.B.: Relativistic Models of Nonlinear Quantum Mechanics. Comm. Math. Phys. 64, 73-82 (1978)

[36] Krasnoselskij, M.A.: Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Oxford, Pergamon Press, 1964

[37] Ladyzhenskaja, O.A., Ural'tseva, N.N.: Linear and Quasilinear Elliptic Equations. New York, Academic Press, 1968

[38] Laloux, B., Mawhin, J.: Multiplicitiy, Leray-Schauder-Formula and Bifurcation. J. Differential Equations 24, 309-322 (1977)

[39] Landes, R.: Quasilineare elliptische Differentialoperatoren mit starkem Wachstum in den Termen höchster Ordnung. Math. Z. 157, 23-36 (1977)

[40] - " - : Quasilinear Elliptic Operators and Weak Solutions of the Euler Equation. Manuscripta Math. 27, 47-72 (1979)

[41] - " - : Two Existence Theorems for Nonlinear Elliptic Equations. J. Differential Equations 33, 45-57 (1979)

[42] Landes, R., Mustonen, V.: On Pseudo-monotone Operators and Nonlinear Noncoercive Problems on Unbounded Domains. Math. Ann. 248, 241-246 (1980)

[43] Leinfelder, H., Simader, C.G.: Bemerkungen über nichtlineare Störungen von Schrödinger-Operatoren. Manuscripta Math. 17, 187-204 (1975)

[44] Lieb, E.H.: Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. Stud. Appl. Math. 57, 93-105 (1977)

[45] Lions, J.L.: Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris, Dunod et Gauthier-Villard, 1969

[46] Luckhaus, S.: Existence and Regularity of Weak Solutions for Semilinear Elliptic Systems of Higher Order. J. Reine Angew. Math. 306, 192-207 (1979)

[47] Lusternik, L.A.: On Conditional Extrema of Functionals. Mat. Sb. 41, 390-401 (1934)

[48] McKenna, P.J.: Uniqueness of Solutions for Semilinear Equations at Resonance. Nonlinear Anal. 2, 235-237 (1978)

[49] Morrey, C.B., Jr.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin (etc), Springer 1966

[50] Mustonen, V.: Strongly Nonlinear Eigenvalue Problems. Quart. J. Math. Oxford (2) 27, 489-509 (1976)

[51] - " - : Strongly Nonlinear Elliptic Variational Inequalities in Unbounded Domains. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 3, 59-74 (1977)

[52] - " - : An Elliptic Boundary Value Problem for Strongly Nonlinear Equations in Unbounded Domains. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 77, 217-230 (1977)

[53] -" - : A Class of Strongly Nonlinear Variational Inequalities. J. London Math. Soc. (2) 18, 157-165 (1978)

[54] Mustonen, V.: A Class of Strongly Nonlinear Variational Inequalities in Unbounded Domains. J. London Math. Soc. (2) 19, 319-328 (1979)

[55] Noussair, E.: On the Existence of Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. J. Differential Equations 34, 482-495 (1979)

[56] Rabinowitz, P.: Some Aspects of Nonlinear Eigenvalue Problems. Rocky Mountain J. Math. 3, 161-202 (1973)

[57] - " - : Variational Methods for Nonlinear Elliptic Eigenvalue Problems. Indiana Univ. Math. J. 23, 729-754 (1974)

[58] - " - : A minimax Principle and Applications to Elliptic Partial Differential Equations. Nonlin. Partial Differ. Equat. Appl., Proc. Semin., Indiana Univ. 1976/77, Lect. Notes Math. 648, 97-115, Springer 1978

[59] - " - : A Bifurcation Theorem for Potential Operators. J. Funct. Anal. 25, 412-424 (1977)

[60] Rauch, J., Williams, D.N.: Euclidean Nonlinear Classical Field Equations with Unique Vacuum. Comm. Math. Phys. 63, 13-29 (1978)

[61] Reed, M., Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics IV. Analysis of Operators. New York, Academic Press 1978

[62] Sather, D.: Branching of Solutions of Nonlinear Equations. Rocky Mountain J. Math. 3, 203-250, (1973)

[63] Schechter, M.: Spectra of Partial Differential Operators. Amsterdam, North Holland 1971

[64] Schmidt, P.H.: The Extended Variational Method Applied to the Bifurcation of Solutions to Nonlinear Problems. Indiana Univ. Math. J. 26,691-706 (1977)

[65] Simader, C.G.: Über schwache Lösungen des Dirichletproblems für streng nichtlineare elliptische Differentialgleichungen. Math. Z. 150, 1-26 (1976)

[66] Simon, B.: On the Infinitude or Finiteness of the Number of Bound States of an N-Body Quantum System, I. Helv. Phys. Acta 43, 607-630 (1970)

[67] Singhof, W.: Über nichtlineare Spektral- und Störungstheorie. Manuscripta Math. 14, 123-162 (1974)

[68] Vainberg, M.M.: Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators. San Francisco (etc), Holden-Day 1964

[69] - " - : Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations. New York, Halsted Press 1973

[70] Webb, J.R.L.: Strongly Nonlinear Elliptic Equations. Journ. d'Anal. non lin., Proc., Besançon 1977, Lect. Notes Math. 665, 242-256, Springer 1978

[71] - " - : Boundary Value Problems for Strongly Nonlinear Elliptic Equations. J. London Math. Soc.(2) 21, 123-132 (1980)

[72] Westreich, D.: Bifurcation of 2m-th Order Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations. Rocky Mountain J. Math. 7, 793-798 (1977)

[73] Yosida, K.: Functional Analysis. 2nd Edition. Berlin (etc), Springer 1968

[74] Zeidler, E.: The Ljusternik-Schnirelman Theory for Indefinite and not Necessarily Odd Nonlinear Operators and its Applications. Nonlinear Anal. 4, 451-489 (1980)

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden elliptische Differentialoperatoren mit strengen Nichtlinearitäten betrachtet, die man, zumindest formal, durch Variation des Integralfunktionals

$$S(u) := \frac{1}{2} B[u] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\, dx$$

erhält; dabei ist B eine symmetrische, halbbeschränkte, dicht definierte und abgeschlossene Bilinearform mit $D(B) \subset H_o^{m,2}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^N$, offen, $p_\alpha \in L^1_{loc}(G)$, $p_\alpha \geq 0$, $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $g_\alpha(t)t \geq 0$, und $G_\alpha := \int_0 g_\alpha(s)ds$ die Stammfunktion zu g_α. Falls die g_α kein polynomielles Wachstumsverhalten besitzen, schien es bislang nicht möglich, auf S die 'direkte Methode der Variationsrechnung' anzuwenden. Während man nämlich unter der Voraussetzung, daß G_α konvex ist für $|\alpha|=m$, nach bekannten Sätzen die schwache untere Halbstetigkeit von S beweisen kann, läßt sich i. a. aus $S(u) < \infty$ nicht schon schließen, daß auch $S(u+t\varphi) < \infty$ ist für $t \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in C_o^\infty(G)$. Des weiteren weiß man von einem minimierenden u zunächst nur $\int_G p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u)\, dx < \infty$, während man bei der Differentiation

$$\lim_{t \to 0} t^{-1}\big(S(u+t\varphi) - S(u) \big)$$

Abschätzungen für $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)$ benötigen würde; bei strengen Nichtlinearitäten ist es aber möglich, daß $p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u) \in L^1(G)$ ist, ohne daß gleichzeitig $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u) \in L^1_{loc}(G)$ wäre.

Als Ausweg wird hier vorgeschlagen, diejenigen Eigenschaften von G_α auszunützen, die aus $g_\alpha(t)t \geq 0$ resultieren, nämlich: $G_\alpha(\lambda t) \leq G_\alpha(t)$, für $0<\lambda<1$. Damit gelingt es zunächst,

$$u+t(\varphi-au) \in D(S)$$

zu zeigen, falls $u \in D(S)$, $\varphi \in C_o^\infty(G)$, $0 \leq t \leq 1$ $0<a<\frac{1}{2}$ ist. Ein Regularitätssatz für mini-

mierendes u liefert dann die Aussage $p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha u \in L^1(G)$. Anschließend wird gezeigt, daß aus $S(u) - (f,u) \leq$ $\leq S(u+t(\varphi-au)) - (f,u+t(\varphi-au))$, für $0<a<\frac{1}{2}$, $0<t<\delta(\varphi,a)$, folgt:

$$F(u,\varphi) = (f,\varphi),$$

wobei $F(v,\varphi) := B[v,\varphi] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha g_\alpha(D^\alpha v)D^\alpha\varphi \, dx$ sei. --

Ausgehend von den Funktionalen F und S kann man im Hilbertraum $H := L^2(G)$ einen nichtlinearen Operator T+N definieren durch

$D(T+N) := \{ u \in D(B) ; p_\alpha G_\alpha(D^\alpha u) \in L^1(G), p_\alpha g_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha u \in L^1(G),$

$\exists f \in H: F(u,\varphi)=(f,\varphi), \forall \varphi \in C_0^\infty(G) \}$,

$(T+N)(u) := f$.

Nun lassen sich die Lemmata zur Variationsmethode für S bequem einsetzen, um verschiedene Aussagen über T+N zu beweisen (dabei sei stets G_α konvex für $|\alpha|=m$):

§5: Falls $B \geq c>0$, ist T+N surjektiv.

§§6,7: Der zu B gehörige selbstadjungierte und halbbeschränkte Operator T habe die Eigenschaften: $\sigma_{ess}(T) \subset [0, \infty)$, $\inf \sigma(T)<0$. Dann ist $\lambda_0 := \inf \sigma(T)$ ein Verzweigungspunkt von T+N, falls $t^{-1}g_\alpha(t) \to 0$ mit $t \to 0$.

In §8 wird die Abgeschlossenheit des Graphen von T+N in $H \times H$ und die Abgeschlossenheit der Menge der Eigenwertparameter untersucht.

§9: In den Gleichungen $F(u,\varphi)=(f,\varphi)$ sollen anstelle von $\varphi \in C_0^\infty(G)$ größere Funktionenklassen zugelassen werden. Dies macht mühsame Approximationen nötig. Dabei werden Bilinearformen $B_u[\varphi,\psi] := B[\varphi,\psi] + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_G p_\alpha \tilde{g}_\alpha(D^\alpha u)D^\alpha\varphi D^\alpha\psi \, dx$ eingeführt, $\tilde{g}_\alpha(t) := t^{-1}g_\alpha(t)$. Es zeigt sich, daß die zugehörigen Operatoren T_u im Sinne starker Resolventenkonvergenz gegen T konvergieren, wenn die Norm von u und f klein wird.

§10: Unter der Annahme $\tilde{g}_\alpha(\lambda t) \leq \tilde{g}_\alpha(t)$, für $0<\lambda<1$, wird ein Eindeutigkeitssatz für das Minimierungsproblem $S(u) = \inf \{ S(v) ; \|v\| \leq r \}$ bewiesen. Als Folgerung ergibt sich, daß T+N einen stetigen Zweig von Eigenwerten besitzt, der bei λ_0 entspringt. ---

Lebenslauf

Am 30. September 1951 bin ich als Sohn des Dr. phil. Rolf Hempel und seiner Ehefrau Gerda, geb. Renner, in Tübingen geboren. Nach der Versetzung meines Vaters nach Rottweil am Neckar besuchte ich dort zunächst die Johan - niter-Volksschule, dann von Mai 1962 an das humanistische Albertus-Magnus-Gymnasium, wo ich im Juni 1970 das Abitur ablegte. Anschließend leistete ich 2 Jahre Wehrdienst beim Heeresmusikkorps 9 in Stuttgart-Bad Cannstatt. Mit dem WS 72/73 nahm ich das Studium der Physik in Freiburg auf, wechselte aber im SS 73 auf Mathematik um. Nach der Vordiplomprüfung im SS 74 (in Freiburg) ging ich mit einem Stipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes für ein Jahr an die Universität Grenoble (Frankreich), von wo ich zum WS 75/76 nach München übersiedelte. Hier legte ich am 3. Mai 1978 die Diplomprüfung in Mathematik mit Auszeichnung ab.

D. GRÄBNER

DISSERTATIONS U. OFFSETDRUCKEREI

Gotenstraße 3
8602 Altendorf bei Bamberg
Telefon: 09545/8791